

# Annexe A

## Équations de Navier-Stokes

Cette annexe est dédiée aux lecteurs curieux qui désirent savoir comment les équations de Navier-Stokes sont développées dans le cas d'un fluide newtonien.

### A.1 Équation de continuité

On obtient la première équation en effectuant un bilan de masse sur un volume de contrôle infinitésimal. Un débit massique non nul entrant dans ce volume de contrôle se traduit par une augmentation de la masse totale de volume :

$$\Delta m_{VC} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz \quad (\text{A.1.1})$$

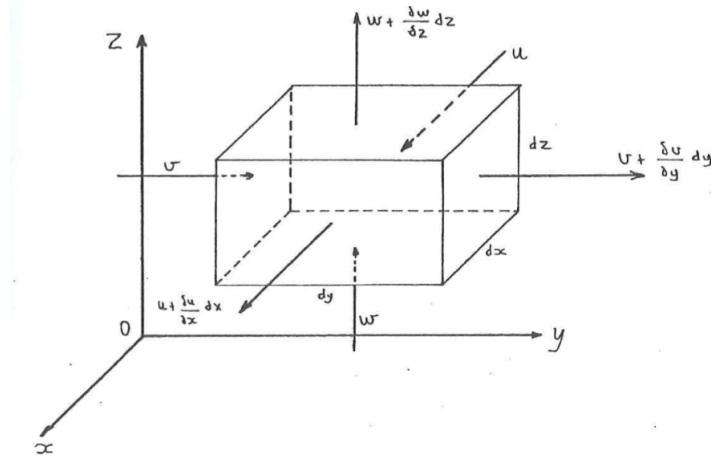


FIGURE A.1 – Conservation de la masse d'un volume de contrôle infinitésimal [38].

L'indice "VC" de la masse est pour indiquer qu'on exprime le changement de masse se trouvant dans notre volume de contrôle. Développons ce terme :

$$\Delta m_{VC} = (m_{x,in} - m_{x,out}) + (m_{y,in} - m_{y,out}) + (m_{z,in} - m_{z,out}) \quad (\text{A.1.2})$$

Le terme  $m_{x,in}$  représente la quantité de masse qui rentre dans le volume de contrôle par la surface dont la normale est dans la direction de l'axe  $x$ . Le terme  $m_{x,out}$  représente la même quantité mais cette fois-ci qui sort du volume de contrôle.

Définissons le vecteur vitesse d'un point  $(x, y, z)$  quelconque de la façon suivante :

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

Développons ensuite les termes de masse entrants et sortants de la surface normale à l'axe  $x$  :

$$m_{x,in} = \rho \cdot dV_{in} = \rho \cdot u \cdot dt dy dz \quad (\text{A.1.4})$$

$$m_{x,out} = \rho \cdot dV_{out} = \rho \cdot \left[ u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] \cdot dt dy dz \quad (\text{A.1.5})$$

Les équations de Navier-Stokes sont développées en supposant un fluide incompressible. Cette hypothèse implique que la masse volumique est constante dans le temps et l'espace. En développant les termes de masse de cette façon selon les 3 dimensions et en introduisant ces expressions dans l'équation (A.1.1), on obtient l'équation de continuité d'un fluide incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.1.6})$$

## A.2 Équations de conservation de quantité de mouvement

Ces équations sont dérivées de la conservation de la quantité de mouvement dictée par la seconde loi de Newton. Si on applique cette loi à un volume de contrôle, on peut écrire :

$$\sum \vec{F} = \frac{D}{Dt}(m\vec{V}) \quad (\text{A.2.1})$$

Cette équation est écrite en coordonnées Eulérienne où  $\frac{D}{Dt}$  est la dérivée matérielle.

Analysons d'abord le terme de gauche et développons les différentes forces qui entrent en jeu. Elles sont de deux types : les forces qui s'exercent sur la surface délimitant le volume de contrôle et les forces de volumes qui agissent à distance.

### A.2.1 Les forces massique $\sum \vec{F}_M$

Ces forces sont proportionnelles à la masse du volume considéré. L'électromagnétisme en est un exemple mais c'est la gravité qui jouera un rôle prédominant et c'est pourquoi c'est la seule force volumique qui sera prise en compte. On exprimera donc pour notre volume de contrôle les forces massiques de la façon suivante :

$$\vec{F}_M = \begin{pmatrix} \rho X dx dy dz \\ \rho Y dx dy dz \\ \rho Z dx dy dz \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

Les composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  représentent l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre le long des axes  $x$ ,  $y$ , et  $z$ . Elles sont donc exprimées en  $[m/s^2]$ . Vu que l'on considère que notre axe  $z$  est vertical et pointe vers le haut, on a :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.3})$$

où  $g=9.81 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$

### A.2.2 Les forces de surfaces $\sum \vec{F}_s$

Les forces de surfaces se traduisent sur notre volume de contrôle par des contraintes normales et tangentielles sur ses différentes surfaces comme illustré à la figure A.2.

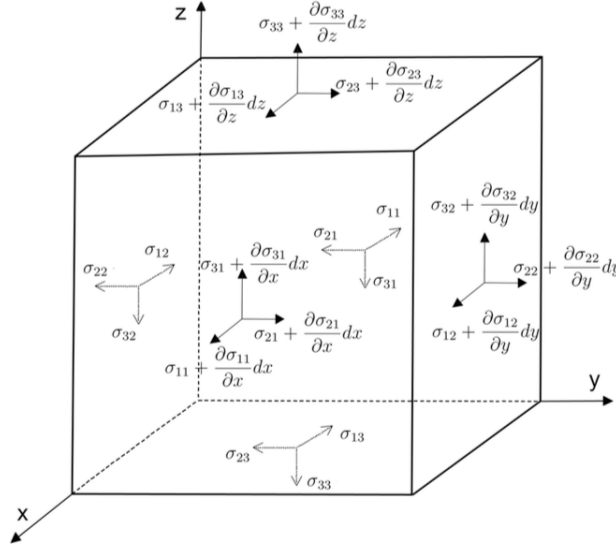


FIGURE A.2 – Contraintes exercées sur un volume infinitésimal [38].

Le premier indice correspond à la direction de la contrainte : 1, 2 et 3 pour  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le deuxième indice correspond à la direction de l'axe normal à la surface sur laquelle est appliquée la contrainte.

On peut par exemple exprimer la force selon l'axe  $x$ .

$$\begin{aligned}
 F_{s,x} = & -\sigma_{11} dydz + \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dx \right) dydz \\
 & -\sigma_{12} dx dz + \left( \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} dy \right) dx dz \\
 & -\sigma_{13} dx dy + \left( \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} dz \right) dx dy
 \end{aligned} \tag{A.2.4}$$

Après simplification,

$$F_{s,x} = \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right) dx dy dz \tag{A.2.5}$$

En faisant le même développement pour  $y$  et  $z$ , on obtient :

$$\vec{F}_s = \begin{cases} F_{s,x} = \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right) dx dy dz \\ F_{s,y} = \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} \right) dx dy dz \\ F_{s,z} = \left( \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right) dx dy dz \end{cases} \tag{A.2.6}$$

Analysons ensuite le terme de droite de l'équation (A.2.1). Il peut s'écrire en coordonnées eulériennes en développant la dérivée matérielle en dérivées partielles :

$$m \frac{D\vec{V}}{Dt} = \begin{cases} m \frac{Du}{Dt} = \rho dx dy dz \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ m \frac{Dv}{Dt} = \rho dx dy dz \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ m \frac{Dw}{Dt} = \rho dx dy dz \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases} \tag{A.2.7}$$

Il suffit d'introduire les équations (A.2.2), (A.2.6) et (A.2.7) dans l'expression (A.2.1) pour obtenir :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right) + X = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} \right) + Y = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right) + Z = \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (\text{A.2.8})$$

### Expression des contraintes $\sigma_{ij}$

L'hypothèse faite ici est celle d'un fluide parfait visqueux turbulent. Ces 3 adjectifs représentent chacun une des 3 contributions aux contraintes totales  $\sigma_{ij}$ . Cette classification vise à détailler les différentes contributions à la contrainte totale en différents modèles (fluide parfait, visqueux et turbulent) tel que :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{parfait} + \sigma_{ij}^{visqueux} + \sigma_{ij}^{turbulent} \quad (\text{A.2.9})$$

Il est important de noter qu'aucun écoulement ne peut être caractérisé complètement par un modèle. Il pourrait par contre faire l'objet de simplification si l'un des termes est prédominant. Par exemple, un écoulement à grand nombre de Reynolds <sup>1</sup> aura tendance à générer des turbulences importantes. Dans ce cas, le terme visqueux sera négligeable.

Les développements ci-dessous ne présenteront pas la contribution turbulente qui est développée en détail au sein du rapport.

#### a) Fluide parfait

Les hypothèses du fluide parfait sont les suivantes :

1. Le fluide est continu. Il est donc indéfiniment divisible.
2. Le fluide est incompressible. Il a donc une masse volumique  $\rho$  constante.
3. Les contraintes tangentielles sont nulles. Il peut donc se déformer sans aucun travail.

Les contraintes du fluide parfait, appelées contraintes statiques sont en fait uniquement les contraintes de pression. La pression s'appliquant dans le sens opposé à la normale sortante des surfaces, elle apparaît avec un signe moins dans la matrice des contraintes.

$$\sigma_{ij}^{parfait} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.10})$$

Des 3 hypothèses faites pour ce modèle, c'est la deuxième qui est la plus restrictive.

Avec ce modèle de fluide parfait, l'équation (A.2.8) devient :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) - g = \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (\text{A.2.11})$$

---

1. Le nombre de Reynolds est défini par  $Re = \frac{\rho \cdot U \cdot L}{\mu}$

### b)Fluide visqueux

Les hypothèses sont les mêmes que pour le fluide parfait excepté pour l'hypothèse concernant les contraintes tangentielles nulles. Pour ce modèle, les frottements internes seront désormais pris en compte, contrairement au modèle du fluide parfait. Les frottements internes apparaissent dans les contraintes tangentielles entre filets fluides voisins. Ces contraintes sont à l'origine de pertes de charge qui convertissent l'énergie cinétique de l'écoulement en chaleur.

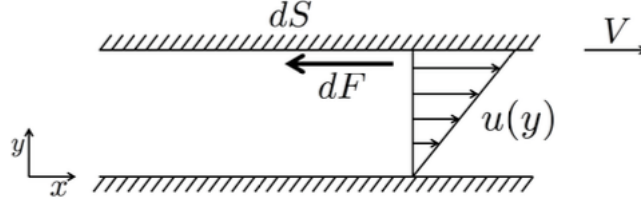


FIGURE A.3 – Profil de vitesse et forces induites par le mouvement différentiel entre deux plaques [8].

Soit deux plaques séparées d'une certaine distance  $\Delta y$  par un fluide visqueux. La plaque supérieure est mise en mouvement à une vitesse non nulle  $V$ . L'expérience montre que la force exercée sur le fluide est proportionnelle au gradient de vitesse horizontale  $u$  par un facteur  $\mu$  :

$$\sigma_{12} = \frac{dF}{dS} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A.2.12})$$

On définit ainsi la viscosité dynamique  $\mu$  qui est constante dans notre cas vu que l'on a  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{V}{\Delta y}$ . Elle est souvent rapportée à la masse volumique qui définit ainsi la viscosité cinématique :

$$\nu [m^2/s] = \frac{\mu [Pa \cdot s]}{\rho [kg/m^3]} \quad (\text{A.2.13})$$

Pour trouver le tenseur de contraintes d'un écoulement visqueux, on introduit l'hypothèse de Stokes qui lie les contraintes  $\sigma_{ij}$  au tenseur  $D_{kl}$  :

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ij} + \sum_k \sum_l \varepsilon_{ijkl} D_{kl} \quad (\text{A.2.14})$$

où  $D_{kl} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right]$  est symétrique. Notons que l'on a 9 inconnues pour le premier terme et 9x9 inconnues pour le second. On réduit le nombre d'inconnues en simplifiant comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = a + b D_{11} + c D_{22} + c' D_{33} + e D_{23} + f D_{12} + f' D_{13} \\ \sigma_{22} = a + b D_{22} + c D_{33} + c' D_{11} + e D_{31} + f D_{23} + f' D_{21} \\ \sigma_{33} = a + b D_{33} + c D_{11} + c' D_{22} + e D_{12} + f D_{31} + f' D_{32} \end{cases} \quad (\text{A.2.15})$$

L'eau étant isotropique, on peut déduire que  $c = c'$  et  $f = f'$ . Si on prend  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  comme direction principale, on a donc  $D_{kl} = 0 \ \forall l \neq k$ . Les directions principales sont les directions des surfaces du volume de contrôle pour lesquelles on a uniquement de l'effort normal sur celles-ci. Les équations (2.21) peuvent encore être fortement simplifiées :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = a + (b - c) D_{11} + c (D_{22} + D_{33} + \mathbf{D}_{11}) \\ \sigma_{22} = a + (b - c) D_{22} + c (D_{33} + D_{11} + \mathbf{D}_{22}) \\ \sigma_{33} = a + (b - c) D_{33} + c \underbrace{(D_{11} + D_{22} + \mathbf{D}_{33})}_{=\text{div } \vec{V}} \end{cases} \quad (\text{A.2.16})$$

On peut synthétiser l'équation (2.21) comme suit :

$$\sigma_{ii} = a + c \operatorname{div} \vec{V} + (b - c) D_{ii} \quad (\text{A.2.17})$$

On peut ensuite la généraliser pour obtenir :

$$\sigma_{ij} = (a + c \operatorname{div} \vec{V}) \delta_{ij} + (b - c) D_{ij} \quad (\text{A.2.18})$$

avec  $\delta_{i,j}$ , le symbole de Kronecker tel que :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.2.19})$$

Il reste à trouver les trois constantes restantes.

1. Au repos, on a  $\vec{V} = 0$ . Il reste uniquement la constante  $a$  qui est en fait le terme de pression.

$$\rightarrow \boxed{\sigma_{11} = a = -p}$$

2. On fait l'hypothèse de Newton tel que  $v = w = 0$  mais que  $u \neq 0$ . Égaler les équations (A.2.18) et (A.2.12) permet d'obtenir une expression pour  $(b-c)$  :

$$\tau = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = (b - c) \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A.2.20})$$

$$\rightarrow \boxed{(b - c) = 2\mu}$$

3. On définit le coefficient de compressibilité  $\lambda$ .

$$\rightarrow \boxed{c = \lambda}$$

En insérant ces 3 constantes et en remarquant que la divergence est nulle dans notre cas car l'eau est considérée comme incompressible (voir équation de continuité (A.1.6)), on obtient les contraintes de Stokes :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (\text{A.2.21})$$

Ces contraintes sont en fait la somme des contraintes statiques et des contraintes visqueuses, on déduit ces dernières aisément :

$$\sigma_{ij}^{\text{visqueux}} = \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.22})$$

En introduisant nos contraintes visqueuses dans l'équation de conservation de quantité de mouvement (A.2.8), les équations du fluide parfait visqueux peuvent être déduites :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} \right) - g = \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (\text{A.2.23})$$

Du fait de l'incompressibilité (A.1.6), on peut réécrire cette équation comme suit :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(wv)}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} \right) - g = \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (\text{A.2.24})$$

Exprimons maintenant les contraintes visqueuses uniquement en fonction des composantes de vitesse. Développons par exemple la première équation de (A.2.8) :

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right) + X = \frac{Du}{Dt} \quad (\text{A.2.25})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + X = \frac{Du}{Dt} \quad (\text{A.2.26})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{=0} + \underbrace{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}_{=\nabla^2 u} \right) + X = \frac{Du}{Dt} \quad (\text{A.2.27})$$

En faisant apparaître l'équation de continuité (A.1.6), on a pu simplifier significativement l'équation. Le raisonnement pour les deux autres équations de (A.2.8) est exactement le même.

On obtient donc une seconde expression de l'équation du fluide parfait visqueux :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(wv)}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g = \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (\text{A.2.28})$$

