

Etude et résolution des singularités cinématiques des systèmes multicorps

Mémoire présenté par
Constant MORETTE

en vue de l'obtention du grade de master en
ingénieur civil mécanicien

Promoteur(s)
Paul FISETTE

Lecteur(s)
Vincent LEGAT, Nicolas DOCQUIER

Année académique 2016-2017

Abstract

La société actuelle est marquée par l'utilisation de robots dans de nombreux domaines. Bien qu'ils permettent d'augmenter considérablement la productivité d'une multitude de tâches, ces derniers peuvent être exposés à des singularités. Une singularité correspond à une pose particulière du robot qui diminue localement sa contrôlabilité et restreint son espace de travail rendant ainsi difficile son changement de configuration. Ce phénomène ne se limite pas uniquement aux robots et peut s'appliquer à d'autres types de systèmes. L'approche symbolique permet de produire des modèles très efficaces pour l'analyse des systèmes multicorps complexes, rendant ainsi leur simulation en temps réel possible. L'objectif de ce travail est de développer une méthode robuste et efficace de résolution des singularités basée sur la technique du repartitionnement de coordonnées. Cette méthode est appliquée à différents mécanismes afin d'évaluer la pertinence de l'algorithme développé.

Remerciements

Au terme de ce travail de fin d'étude, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu au cours de cette année.

Je remercie particulièrement mon promoteur Paul Fisette pour sa disponibilité, ses précieux conseils, ainsi que pour sa bonne humeur permanente. Je suis spécialement reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordé afin de réaliser le programme implémenté au cours de cette année et qui sera par la suite intégré dans les modules Robotran du Centre de Recherche en Energie et Mecatronique (CEREM).

J'ai bénéficié, au cours de ces trois dernières années, au travers des quelques projets réalisés, des connaissances de professeurs et assistants afin de perfectionner ma maîtrise de Robotran. Je tiens naturellement à les remercier.

Je remercie également Vincent Legat et Nicolas Docquier d'avoir accepté le rôle de lecteur.

Enfin, merci à ma famille et à mes amis pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de mon parcours universitaire, et plus particulièrement au cours de cette année. Merci spécialement à mes parents pour la relecture de ce travail.

Table des matières

Liste des symboles	vii
1 Introduction	1
2 Système multicorps	3
2.1 Système multicorps à topologie arborescente	3
2.2 Système multicorps à topologie bouclée	5
2.2.1 Génération des équations de contraintes	5
2.2.2 Méthode du partitionnement de coordonnées	7
3 Singularité	12
4 Dynamique directe des systèmes multicorps	15
4.1 Dynamique directe des systèmes à topologie arborescente	15
4.2 Dynamique directe des systèmes à topologie bouclée	16
5 Singularité cinématique dûe aux contraintes de boucle	20
5.1 Implémentation de l'algorithme	21
5.2 Système bielle-manivelle	23
5.3 Robot parallèle planaire	27
5.3.1 Influence du seuil de conditionnement sur le nombre de reparti- tionnements de coordonnées	31
5.3.2 Influence du seuil de conditionnement sur le temps d'exécution	33
5.4 Plateforme de Stewart	34

6	Singularité cinématique dans une séquence de rotations	38
6.1	Méthode de résolution	40
6.2	Rotation d'une base	41
6.3	Résolution de la singularité	42
7	Conclusion	49
	Bibliographie	51

Liste des symboles

q	Coordonnées généralisées du système multicorps
u	Sous-ensemble des coordonnées généralisées indépendantes
v	Sous-ensemble des coordonnées généralisées indépendantes
\dot{q}	Dérivée première de q
\ddot{q}	Dérivée seconde de q
N^{body}	Nombre de corps du système multicorps
N^{joint}	Nombre d'articulations du système multicorps
h	Contraintes algébriques
J	Matrice jacobienne
M	Matrice de masse
\mathbf{g}	Vecteur gravité
Q	Forces et couples articulaires
\mathbf{F}_{ext}	Résultante des forces externes
\mathbf{L}_{ext}	Résultante des couples externes
λ	Multiplicateur de Lagrange
$\kappa(A)$	Conditionnement de la matrice A
R	Matrice de rotation
ω	Vitesse angulaire absolue

1 Introduction

La robotique est aujourd'hui en plein essor, pas uniquement dans le monde industriel mais également dans notre quotidien. Les robots développés à l'heure actuelle sont capables de réaliser des tâches de plus en plus sophistiquées. Les plus grandes compagnies cherchent à tout automatiser afin d'améliorer leur productivité. On constate l'emploi de systèmes de plus en plus parallèles, tels que le robot Delta, fréquemment utilisé dans le domaine pharmaceutique, ainsi que la plateforme de Stewart, principalement utilisée en aéronautique, dans les simulateurs de vol. Les robots parallèles présentent de nombreux avantages face aux robots sériels. Cependant, leur espace de travail est largement réduit par la présence de singularités. Les singularités correspondent à des poses particulières où le robot ne peut être contrôlé et où les efforts subis par les articulations du mécanisme peuvent tendre vers l'infini. Ce phénomène ne se limite cependant pas aux robots et peut s'appliquer à tout type de système, notamment le bras d'un être humain. Il faut absolument éviter ces singularités.

Afin d'analyser le comportement des systèmes multicorps, ceux-ci sont modélisés. On emploie, dans le cadre de ce travail, le programme Robotran[1] afin de les représenter. Il existe différentes approches afin d'exprimer les coordonnées de chaque élément du système. On peut notamment utiliser les coordonnées absolues, les coordonnées relatives ou encore les quaternions, qui sont moins fréquemment utilisés. L'Université de Liège les emploie notamment. A l'École Polytechnique de Louvain, on a recours aux coordonnées relatives. Celles-ci présentent l'avantage de générer moins d'équations, bien qu'elles soient plus complexes. Au cours de ce travail, on a modélisé différents systèmes multicorps avant d'étudier leurs poses singulières et de les résoudre ensuite. L'objectif de ce mémoire est de développer une méthode robuste et efficace de résolution des singularités basée sur la méthode du repartitionnement de coordonnées.

La première partie de ce travail consiste en une courte synthèse des notions liées aux systèmes multicorps. Cette section s'inspire du cours "Multibody system dynamics"[2] donné par le professeur Paul Fiset. Dans un premier temps, les systèmes multicorps simples sont présentés, avant d'aborder ensuite les systèmes plus complexes et les contraintes algébriques que ceux-ci impliquent. La technique du partitionnement de coordonnées est également décrite.

Par la suite, on découvre ce à quoi correspond la singularité cinématique d'un système multicorps au travers de l'illustration d'un cas simple : un mécanisme à quatre barres. On décèle notamment la raison pour laquelle la méthode du repartitionnement de coordonnées est indispensable afin d'éviter tout risque lié aux singularités.

Enfin, la section suivante reprend le développement de la dynamique directe des systèmes multicorps. Cette procédure est essentielle pour les simulations, notamment afin de prédire le mouvement des systèmes multicorps.

Finalement, la dernière partie de ce travail correspond à l'étude et à la résolution des singularités cinématiques. Cette partie comporte une description de l'algorithme développé au cours de ce travail permettant de résoudre les problèmes résultant des positions singulières des systèmes multicorps. Les résultats expérimentaux obtenus suite à l'utilisation de ce programme sur des applications réelles sont analysés. Cette partie pratique admet également l'étude des singularités cinématiques mathématiques dues à l'angle intermédiaire d'une séquence de plusieurs rotations.

2 Système multicorps

Le concept de système multicorps est utilisé en mécanique pour modéliser le comportement de corps rigides, chacun de ces corps décrivant de grands déplacements à la fois en translation et en rotation. Il s'agit d'un ensemble de N corps rigides reliés par des articulations. Les articulations sont des éléments sans masse du système, reliant deux corps selon leurs points d'ancrage, qui permettent des mouvements relatifs entre ces corps.

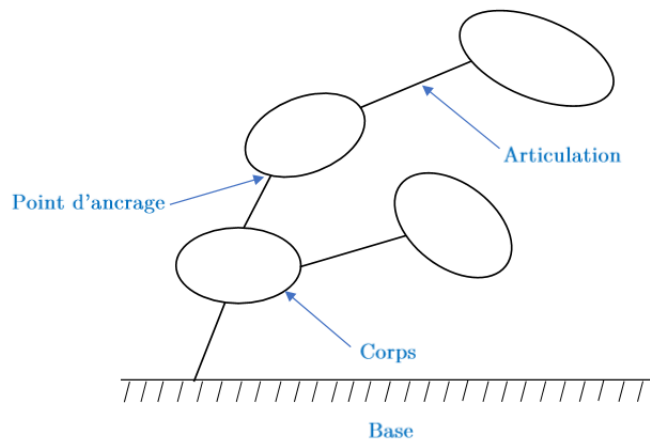


FIGURE 2.1 – Représentation d'un système multicorps

Dans un premier temps, on s'intéresse aux systèmes multicorps à topologie arborescente, c'est-à-dire les structures sans boucle cinématiques. Par la suite, on considère une extension de ce type de structure, c'est-à-dire les structures à topologie bouclée, dans le cas où le système comporte des cycles.

2.1 Système multicorps à topologie arborescente

Ce système est notamment appelé *tree-like multibody system* en anglais, sa forme évoquant la ramification des branches d'un arbre. Les deux principales caractéristiques de ce type de système sont les suivantes :

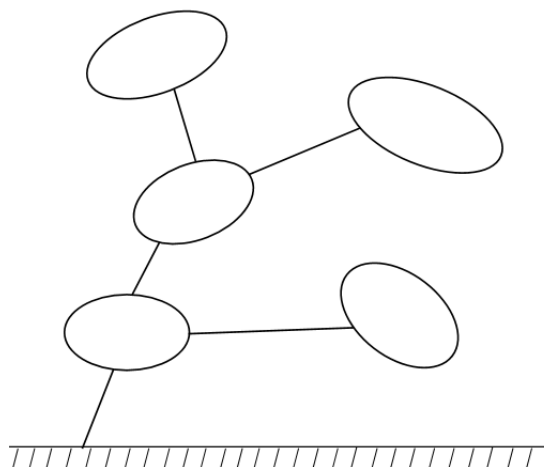


FIGURE 2.2 – Système multicorps à topologie arborescente

- Le nombre de corps rigides est égal au nombre d'articulations du système
- Le chemin d'un corps du système à un autre est unique

Le nombre d'articulations détermine le nombre de degrés de libertés du système. Etant donné la multitude d'articulations que l'on peut rencontrer dans de nombreuses applications, il serait difficile de proposer un registre contenant chacune d'entre elles. Néanmoins, chaque joint peut être modélisé, en terme de mouvements relatifs, comme une succession d'articulations prismatiques et rotoïdes. Pour cette raison, on ne considérera ici que ces deux types d'articulations.

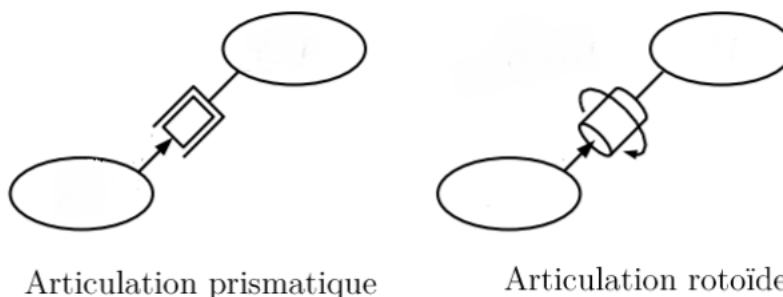


FIGURE 2.3 – Articulation prismatique et rotoïde

2.2 Système multicorps à topologie bouclée

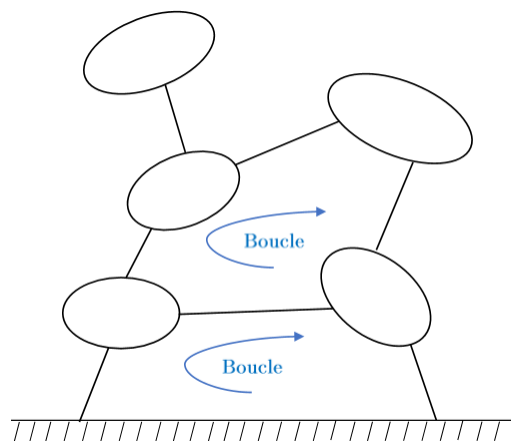


FIGURE 2.4 – Système multicorps à topologie bouclée

Dans de nombreux cas, la topologie des systèmes ne peut cependant pas être représentée sous forme d'arbre. On verra par la suite des systèmes plus complexes tels que le robot parallèle ou encore la plateforme de Stewart. Ces systèmes multicorps comportent une, voire plusieurs boucles. Ces boucles correspondent physiquement à des connections entre les différents corps, et restent fermées lors de tout mouvement du système. Cette caractéristique doit être prise en compte dans les modèles cinématique et dynamique.

2.2.1 Génération des équations de contraintes

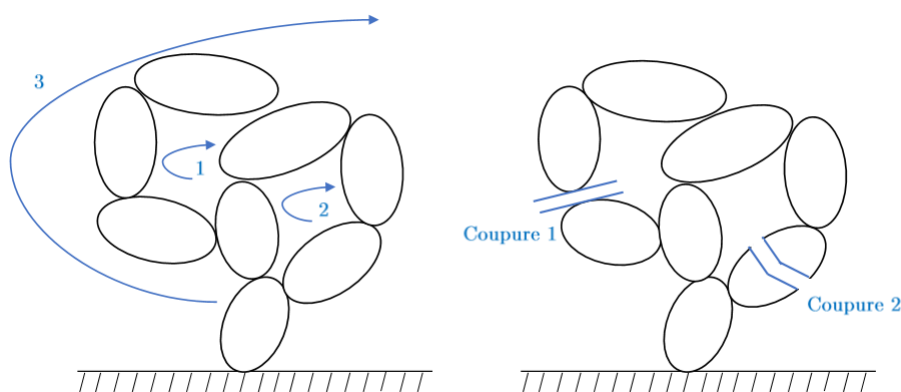


FIGURE 2.5 – Coupures de boucles

Afin de gérer un système multicorps complexes, il est nécessaire de le ramener à son arbre équivalent. Ce dernier est obtenu en coupant virtuellement chaque boucle du système. Il faut néanmoins respecter deux critères :

- **Nombre de coupures nécessaires.** Pour les systèmes à boucle fermée, le nombre d'articulations N^{joint} est plus important que le nombre de corps N^{body} . La différence $N^{cut} \triangleq N^{joint} - N^{body}$ correspond au nombre cyclomatique, c'est-à-dire le nombre de coupures nécessaires afin d'obtenir l'arbre équivalent du système. Il s'agit en fait du nombre de boucles indépendantes du système multicorps.
- **Nombre de conditions de boucle** Considérons le système représenté sur la figure 2.5. La fermeture de la première boucle n'entraîne pas la fermeture de la deuxième puisque les deux boucles sont indépendantes. Cependant, la fermeture de ces deux boucles engendre la fermeture de la troisième, celle-ci n'étant pas indépendante. Dès lors, cette coupure n'est pas prise en compte dans le nombre de coupures nécessaires, c'est-à-dire N^{cut} .

Les conditions de coupure de boucles entraînent des contraintes algébriques sur les coordonnées généralisées q :

$$h(q) = 0 \tag{2.1}$$

avec $h \in \mathbb{R}^m$, qui sont non linéaires et qui ne peuvent pas être résolue analytiquement dans la plupart des cas. Ces contraintes doivent être satisfaites à chaque instant, ainsi que leurs dérivées :

$$\begin{aligned} h(q) &= 0 \\ \dot{h}(\dot{q}, q) &= 0 \\ \ddot{h}(\ddot{q}, \dot{q}, q) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

On distingue plusieurs types de contraintes sur Robotran, notamment :

- **Coupure d'un corps.** Cette coupure est la plus générale et peut être appliquée dans tout type de cas afin d'ouvrir une chaîne cinématique fermée. Un corps du système est découpé en deux parties et est modélisé par deux corps. Le corps secondaire est un corps fictif ajouté dont la masse et l'inertie sont nulles.
- **Coupure d'une articulation sphérique.** Cette coupure est appliquée dans le cas où deux corps de la boucle cinématique sont reliés par une rotule idéale, c'est-à-dire sans jeu, ni couple transmis entre les deux corps. On la nomme également coupure de type ball.
- **Coupure d'une bielle.** Cette coupure est appliquée lorsque deux corps sont reliés par une bielle dont la masse et l'inertie sont négligeables. La bielle sert à maintenir une distance constante entre deux points du système.
- **Articulations commandées.** La cinématique d'une coordonnée généralisée commandée est dictée par une fonction dépendante du temps $f(t)$.
- **Contraintes imposées par l'utilisateur.** Les trois types de coupure ainsi que les articulations commandées ne suffisent pas à exprimer toutes les contraintes. Ces contraintes en question ne sont dès lors pas directement générées par le programme et doivent dès lors être spécifiées par l'utilisateur.

2.2.2 Méthode du partitionnement de coordonnées

Du fait des contraintes existant au sein du système multicorps, certaines coordonnées généralisées sont interdépendantes. Ces contraintes sont notamment dues aux coupures de boucle mais également aux contraintes imposées par l'utilisateur. La méthode du partitionnement de coordonnées permet de déterminer le sous-ensemble minimal des coordonnées généralisées qui permet une description complète de la configuration du système. La résolution des m équations de contraintes permet de déterminer la valeur des m coordonnées généralisées dépendantes, dénotées q_v . Celles-ci dépendent des $n - m$ coordonnées généralisées indépendantes q_u .

La matrice jacobienne des contraintes, notée J , peut être découpée en deux sous-matrices J_u et J_v , coïncidant respectivement à la sous-matrice dont les colonnes correspondent aux coordonnées indépendantes q_u et à la sous-matrice dont les colonnes correspondent aux coordonnées dépendantes q_v . Pour la suite du développement, on s'intéresse principalement à J_v :

$$J_v(q) \triangleq \frac{\partial h(q)}{\partial q_v^T} \quad (2.3)$$

Soit un système multicorps composé de n corps et sujet à m contraintes indépendantes $h(q) = 0$. On considère à nouveau le système 2.2, mais en l'exprimant cette fois-ci en fonction de la jacobienne des contraintes J :

$$\begin{aligned} h(q) &= 0 \\ \dot{h}(\dot{q}, q) &= J(q)\dot{q} = 0 \\ \ddot{h}(\ddot{q}, \dot{q}, q) &= J(q)\ddot{q} + \dot{J}(\dot{q}, q)\dot{q} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

On peut déterminer les valeurs de q_v , \dot{q}_v et \ddot{q}_v , en partitionnant la première et seconde dérivée des contraintes :

$$\begin{aligned} (J_u \ J_v) \begin{pmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_v \end{pmatrix} &= 0 \\ (J_u \ J_v) \begin{pmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_v \end{pmatrix} + (\dot{J}_u \ \dot{J}_v) \begin{pmatrix} \dot{q}_u \\ \dot{q}_v \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned} q &= f(q_u) \\ \dot{q}_v &= B_{vu}\dot{q}_u \\ \ddot{q}_v &= B_{vu}\ddot{q}_u + d \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec $B_{vu} = -J_v^{-1}J_u$ et $d = -(J_v)^{-1}\dot{J}\dot{q}$

Etant donné l'expression de \dot{q}_v et \ddot{q}_v , il est indispensable que la matrice J_v soit régulière et bien conditionnée, et ce pour assurer un bon fonctionnement du système. En effet, si la matrice n'est pas bien conditionnée, il est alors très compliqué de prédire le comportement ultérieur du système. Dans le cas où la matrice J_v est singulière, on parle dès lors de singularité cinématique du système multicorps. Il est donc essentiel de déterminer le partitionnement $\{u, v\}$ de telle sorte que J_v soit de plein rang. En choisissant correctement le sous-ensemble v , la matrice J_v sera dès lors régulière.

Pour établir le partitionnement d'un certain système multicorps, on peut se baser :

- Sur un raisonnement intuitif, basé sur la configuration du système. Par exemple, pour un système bielle-manivelle, on peut fixer la rotation de la manivelle comme variable indépendante u . On abordera d'ailleurs cette application par la suite.
- Sur la factorisation LU de la matrice jacobienne $J(q)$, avec la permutation des colonnes sur base du plus grand pivot.

Le partitionnement constitue donc un étape capitale afin de développer la cinématique et la dynamique des systèmes à topologie bouclée.

Dans le cadre de ce travail, le bon conditionnement de J_v est assuré par la méthode de factorisation LU avec permutation complète des lignes et des colonnes de la matrice. Cette méthode consiste à exprimer J_v comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure et d'une matrice triangulaire supérieure : $J_v = LU$. La permutation des lignes et des colonnes de la matrice jacobienne des contraintes est réalisée de manière à obtenir les plus grands pivots dans sa factorisation LU, en valeur absolue, afin d'avoir une matrice J_v bien conditionnée.

Gibert Strang[3] offre de plus amples détails sur la méthode et son implémentation.

Le principe de permutation est illustré ci-dessous :

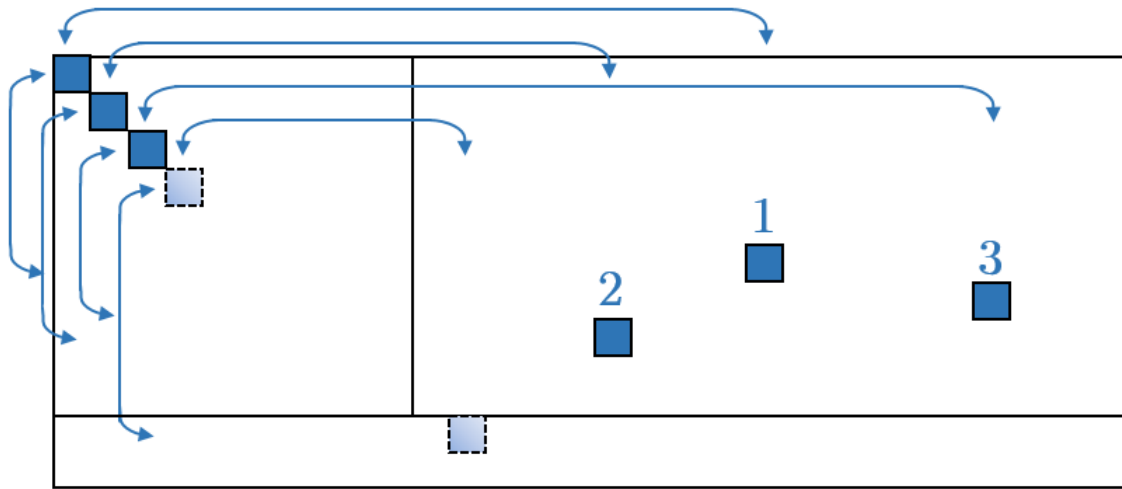


FIGURE 2.6 – Factorisation LU avec pivotement complet

Considérons la matrice jacobienne des contraintes. On cherche, dans un premier temps l'élément de la matrice de plus grande valeur absolue, noté **1** sur la figure 2.6. Il s'agit du meilleur candidat pivot. A l'aide d'une permutation de lignes et de colonnes, celui-ci est dès lors placé en premier élément de la diagonale de la matrice carrée située à gauche de la jacobienne des contraintes, qui correspond à la sous-matrice J_v . Après la première itération de l'algorithme, l'opération est ensuite répétée, en prenant cette fois-ci la sous-matrice dont le premier élément correspond à $J(2, 2)$ afin de placer le deuxième élément de plus grande valeur absolue sur la diagonale de J_v . Cette opération est à nouveau répétée pour chaque élément de la diagonale. Par permutations successives, on a ainsi formé une matrice comportant les plus grands pivots sur la diagonale, assurant ainsi son bon conditionnement.

Si, malgré toutes les permutations de lignes et de colonnes de la matrice, un pivot est nul ou proche de zéro, cela signifie que le système multicorps comporte des contraintes redondantes. Ces contraintes ne font néanmoins pas l'objet de ce travail. Par la suite, on pourrait envisager de résoudre les problèmes de singularité liés à ces contraintes redondantes, dans le cadre d'un autre travail de fin d'études.

La matrice carrée de gauche obtenue suite à la factorisation de J est dès lors choisie comme le meilleur candidat pour J_v . Les indices de permutation des colonnes de la matrice correspondent au sous-ensemble v idéal d'un point de vue numérique.

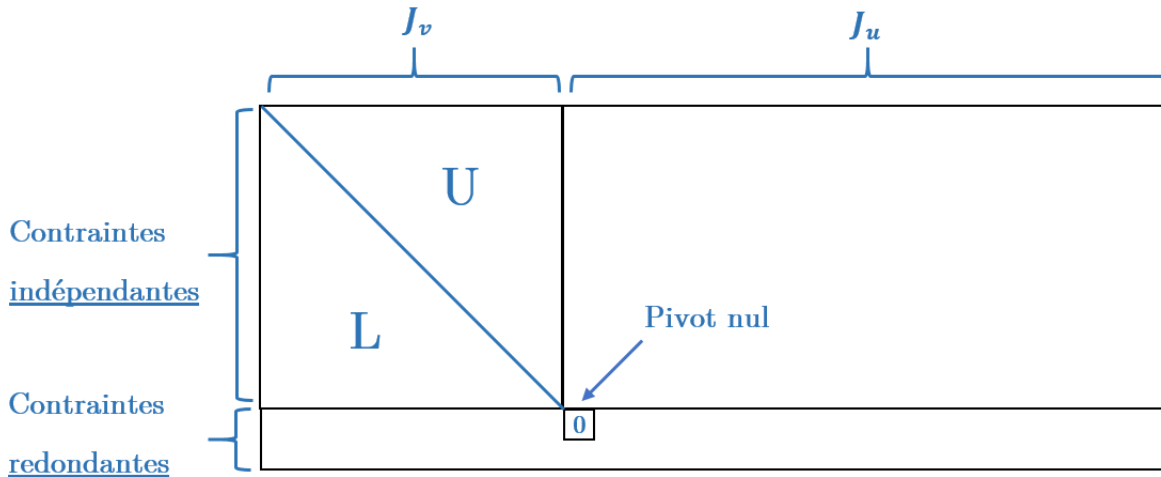


FIGURE 2.7 – Matrice jacobienne J_v , obtenue suite à la factorisation LU

Chaque ligne de la matrice J correspond à une équation de contrainte h tandis que chaque colonne de la matrice J_v correspond à une coordonnée dépendante q_v .

Une fois le partitionnement exécuté, les coordonnées généralisées $q_v, \dot{q}_v, \ddot{q}_v$ du système 2.6 peuvent dès lors être déterminées. On utilisera, dans cette étude, la méthode itérative de Newton-Raphson :

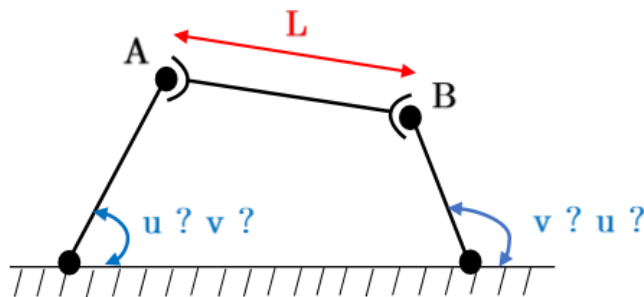
$$\dot{q}_v^{t+1} = \dot{q}_v^t - J_v^{-1}(q_v^t, q_u)h(q_v^t, q_u) \quad (2.7)$$

en connaissant évidemment, à chaque pas de temps, la valeur de q_u .

3 Singularité

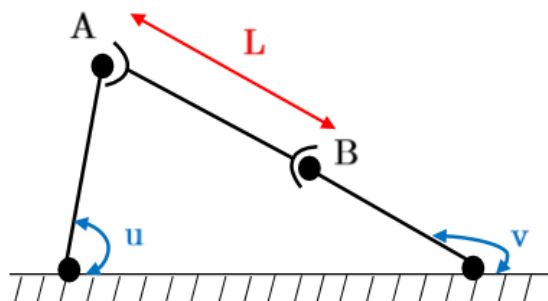
Afin de mieux cerner le concept de singularité d'un système multicorps, considérons un cas simple : un mécanisme à quatre barres. Il s'agit d'un système composé de quatre corps rigides, articulés entre eux par des liaisons rotoïdes. Une des barres correspond au bâti du système.

Le schéma du système est le suivant :



Puisque le système est à topologie bouclée, il est nécessaire de réaliser une coupure de boucle. On a opté, ici, pour une coupure de type bielle qui impose une distance L constante entre les deux rotules A et B . Le modèle comporte une articulation rotoïde indépendante notée u et une dépendante notée v . Cet exemple permet d'illustrer la raison pour laquelle le choix de la variable indépendante est essentiel.

La position du système qui nous intéresse correspond à l'alignement de deux barres dans le cas où l'articulation indépendante u correspond à l'articulation située à l'extrême gauche, comme indiqué sur la figure suivante :



Une coupure de type bielle impose une distance constante entre deux points. La contrainte suivante est imposée au système :

$$h = d_{AB} - L = 0 \quad (3.1)$$

La matrice J_v , qui correspond ici à un scalaire, s'écrit :

$$J_v = \frac{\partial h}{\partial v} \quad (3.2)$$

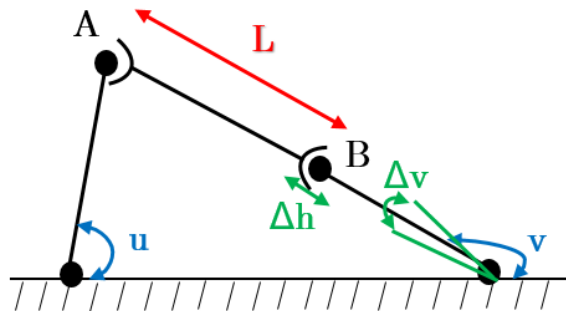
On considère un petit déplacement Δv de la barre autour de l'articulation rotoïde. On peut dès lors approximer les dérivées par les petits déplacements :

$$\begin{cases} \partial v \simeq \Delta v \\ \partial h \simeq \Delta h \end{cases} \quad (3.3)$$

J_v peut être réécrite sous la forme suivante :

$$J_v = \frac{\partial h}{\partial v} \simeq \frac{\Delta h}{\Delta v} \quad (3.4)$$

Dans cette position particulière, toute variation Δv ne modifie pas Δh . On comprend cela en observant le schéma suivant :



Dès lors,

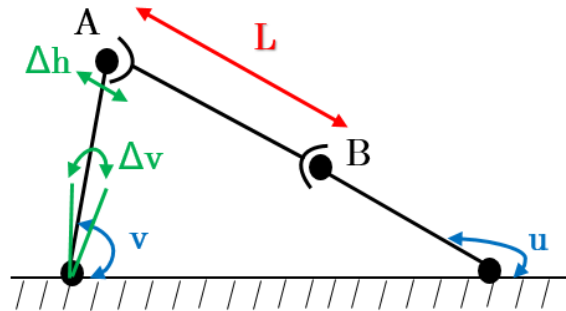
$$J_v = \frac{\partial h}{\partial v} \simeq \frac{\Delta h}{\Delta v} = \frac{0}{\Delta v} = 0 \quad (3.5)$$

$$\Leftrightarrow J_v^{-1} = \left(\frac{\delta h}{\delta v} \right)^{-1} = \infty \quad (3.6)$$

Le système est donc confronté à une singularité cinématique pour ce choix de coordonnée indépendante.

Il est alors nécessaire de repartitionner les coordonnées du système : la coordonnée qui était initialement dépendante de l'autre coordonnée définit à présent le mouvement du système.

$$\begin{aligned} u &\rightarrow v \\ v &\rightarrow u \end{aligned} \quad (3.7)$$



On a désormais :

$$J_v = \frac{\delta h}{\delta v} = \frac{\Delta h}{\Delta v} \neq 0 \quad (3.8)$$

Grâce au repartitionnement de coordonnées, on a donc résolu le problème de singularité cinématique du système. Il est essentiel d'insister sur le fait qu'une singularité cinématique correspond à une position particulière du système multicorps pour une certaine configuration $\{u, v\}$.

4 Dynamique directe des systèmes multicorps

La dynamique directe consiste à déterminer les accélérations des articulations \ddot{q} pour une configuration donnée (q, \dot{q}) , sous la présence de forces et couples agissant sur le système. Cette procédure est essentielle pour la simulation des systèmes multicorps. À partir d'une configuration initiale (q_0, \dot{q}_0) , il est possible de prédire le mouvement du système en intégrant les accélérations $\ddot{q}(t)$. Dans cette section, on découvre les relations liées à la dynamique directe d'un système dont la structure peut être représentée sous forme d'arbre. On détaillera ensuite son extension aux systèmes plus complexes, c'est-à-dire les systèmes à topologie bouclée. Celle-ci est notamment réalisée à l'aide de la méthode du partitionnement de coordonnées décrite précédemment.

4.1 Dynamique directe des systèmes à topologie arborescente

Forme explicite :

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, F_{ext}, L_{ext}, g, Q) \quad (4.1)$$

Forme semi-explicite :

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}, F_{ext}, L_{ext}, g) = Q \quad (4.2)$$

- M est la matrice de masse symétrique définie positive du système
- c regroupe les termes de Coriolis, centrifuges et de gravité ainsi que la contribution des forces extérieures résultantes F_{ext} et couples L_{ext} agissant sur les corps du système
- g est le vecteur gravité
- Q représente les forces et couples articulaires

4.2 Dynamique directe des systèmes à topologie bouclée

Quand les coordonnées liées aux articulations d'un système multicorps ne sont pas indépendantes, on parle alors d'un système multicorps contraint, puisque des dépendances existent entre les coordonnées. Il s'agit de contraintes qui sont exprimées à l'aide d'équations mathématiques.

Pour m fermetures de boucles indépendantes, les forces de contrainte inconnues peuvent être déterminées à partir de m multiplicateurs de Lagrange. Le mouvement du système multicorps contraint peut être réécrit dans sa forme semi-explicite :

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}, F_{ext}, L_{ext}, g) = Q + J^T(q)\lambda \quad (4.3)$$

où J est la jacobienne des contraintes et les coefficients $\lambda \in \mathbb{R}^m$ représentent les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes.

L'équation 4.3 liée aux équations des contraintes donne le système de $n+m$ équations différentielles suivant, avec $q \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}, F_{ext}, L_{ext}, g) &= Q + J^T(q)\lambda \\ h(q) &= 0 \\ \dot{h}(\dot{q}, q) &= J(q)\dot{q} = 0 \\ \ddot{h}(\ddot{q}, \dot{q}, q) &= J(q)\ddot{q} + \dot{J}(\dot{q}, q)\dot{q} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Il est difficile d'exprimer analytiquement les coordonnées dépendantes en fonction des indépendantes lorsque les contraintes sur les coordonnées généralisées sont non linéaires. Cependant, si les m contraintes sont indépendantes, la réduction du système 4.4 peut s'obtenir à partir de la méthode du partitionnement de coordonnées. Puisque les m contraintes sont indépendantes, la jacobienne des contraintes est de plein rang, c'est-à-dire m , et m coordonnées peuvent dès lors être exprimées en fonction des $(n - m)$ autres.

Après réajustement des variables, le vecteur q peut alors être réécrit sous la forme :

$$q = \begin{pmatrix} q_u \\ q_v \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

De la même manière, la jacobienne des contraintes peut être réécrite sous la forme :

$$J = (J_u \ J_v) \quad (4.6)$$

Après partitionnement de la matrice de masse M et du vecteur c , le système 4.4 devient dès lors le suivant :

$$\begin{pmatrix} M_{uu} & M_{uv} \\ M_{vu} & M_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_u \\ c_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_u \\ Q_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_u^T \\ J_v^T \end{pmatrix} \lambda \quad (4.7)$$

Puisque la matrice J_v est de plein rang, c'est-à-dire non singulière, on peut éliminer les multiplicateurs de Lagrange λ :

$$(M_{uu} \ M_{uv}) \begin{pmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_v \end{pmatrix} + B_{vu}^T (M_{vu} \ M_{vv}) \begin{pmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_v \end{pmatrix} + c_u + B_{vu}^T c_v = Q_u + B_{vu}^T Q_v \quad (4.8)$$

avec

$$B_{vu} = -(J_v)^{-1} J_u \quad (4.9)$$

On reprend ici l'expression des coordonnées généralisées indépendantes q_v ainsi que leurs dérivées \dot{q}_v , \ddot{q}_v obtenues suite au partitionnement de coordonnées :

$$\begin{aligned} q_v &= f(q_u) \\ \dot{q}_v &= B_{vu} \dot{q}_u \\ \ddot{q}_v &= B_{vu} \ddot{q}_u + d \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec

$$d = -(J_v)^{-1} \dot{J} \dot{q} \quad (4.11)$$

Ces termes peuvent dès lors être éliminés des équations 4.8. On a donc finalement le système réduit d'équations pour la dynamique directe des systèmes multicorps en boucle fermée :

$$\begin{aligned} (M_{uu} + M_{uv}B_{vu} + B_{vu}^T M_{vu} + B_{vu}^T M_{vv}B_{vu}) \ddot{q}_u + \\ (M_{uv} + B_{vu}^T M_{vv}) d + (c_u + B_{vu}^T c_v) = Q_u + B_{vu}^T Q_v \end{aligned} \quad (4.12)$$

qui peut être réécrit sous la forme :

$$M_r(q_u) \ddot{q}_u + c_r(\dot{q}_u, q_u) = Q_r \quad (4.13)$$

avec

- $M_r(q_u) = M_{uu} + M_{uv}B_{vu} + B_{vu}^T M_{vu} + B_{vu}^T M_{vv}B_{vu}$
- $c_r(\dot{q}_u, q_u) = (M_{uv} + B_{vu}^T M_{vv}) d + (c_u + B_{vu}^T c_v)$
- $Q_r = Q_u + B_{vu}^T Q_v$

Sous cette forme, le système d'équations purement différentielles 4.13 est défini uniquement en fonction des $(n - m)$ coordonnées généralisées indépendantes q_u . L'ensemble des étapes nécessaires à sa réécriture sous sa forme finale est repris ci-dessous :

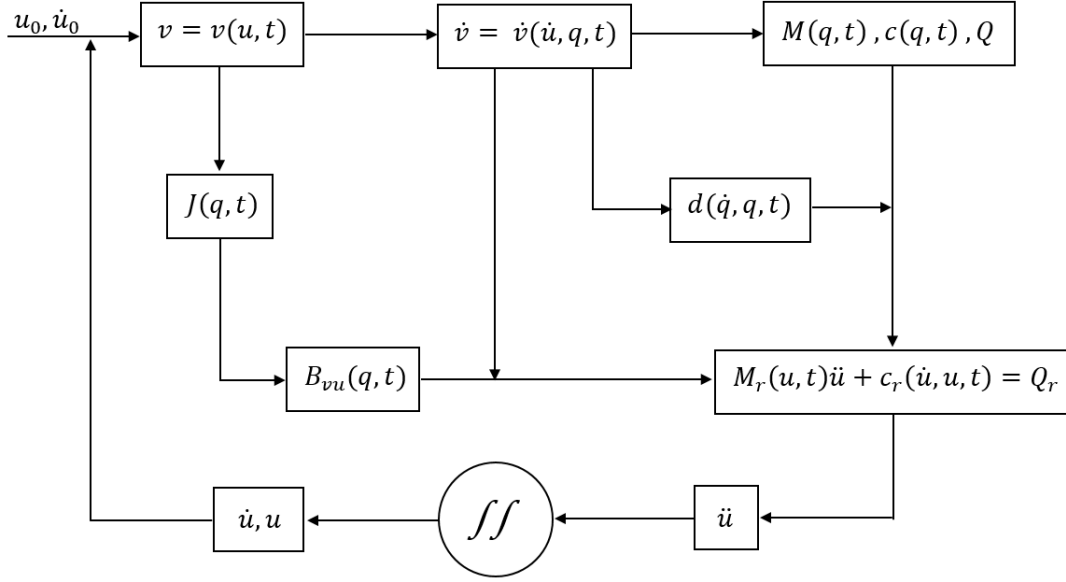


FIGURE 4.1 – Méthode du partitionnement de coordonnées pour la dynamique directe

Il est désormais possible de déterminer la valeur de certaines forces de contrainte durant le mouvement du système multicorps. Afin de réaliser cela, il est nécessaire de calculer les multiplicateurs de Lagrange λ . A partir du système d'équations 4.7, on obtient, en isolant ceux-ci dans la deuxième ligne :

$$\lambda = (J_v^T)^{-1} \left\{ (M_{vu} \ M_{vv}) \begin{pmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_v \end{pmatrix} + c_v - Q_v \right\} \quad (4.14)$$

et en utilisant la relation $\ddot{q}_v = B_{vu}\ddot{q}_u + d$, on obtient l'expression :

$$\lambda = (J_v^T)^{-1} \{ (M_{vu} + M_{vv}B_{vu}) + c_v - Q_v + M_{vv}d \} \quad (4.15)$$

qui nous permettra de calculer les forces de contrainte généralisées.

5 Singularité cinématique dûe aux contraintes de boucle

L'int eret de ce travail est de résoudre les problèmes liés aux singularités cinématiques pouvant apparaître durant le mouvement d'un système multicorps. Dans un premier temps, on s'intéresse à la singularité dûe à l'inversion de la jacobienne des contraintes, déjà mentionnée précédemment. Celle-ci concerne uniquement les systèmes à topologie bouclée puisque les contraintes sont issues des fermetures de boucle. Par la suite, on considère également un autre type de singularité. Il s'agit de la singularité cinématique dûe à la rotation intermédiaire d'une série d'articulations rotoïdes. Ce cas est d etaill e dans une section ultérieure.

Afin de décrire aux mieux les singularités cinématiques, trois systèmes sont pr esent es : dans un premier temps, leur modèle est décrit, et par la suite, on montre l'efficacité de la méthode développée dans le but de résoudre les problèmes rencontr es suite à des singularités cinématiques. Il s'agit des systèmes suivants :

1. Système bielle-manivelle
2. Robot parallèle planaire
3. Plateforme de Stewart

Le premier cas étudié, c'est-à-dire le système bielle-manivelle, se révèle être particulièrement simple à résoudre étant donn e qu'il ne nécessite qu'un repartitionnement de coordonnées. Par contre, d'autres systèmes s'avèrent être beaucoup plus complexes, notamment le robot parallèle planaire, comme on le verra dans la suite de ce travail.

5.1 Implémentation de l'algorithme

L'implémentation de l'algorithme testé sur les différents cas étudiés est réalisée sur l'environnement Matlab/Simulink selon un modèle symbolique et une approche robuste d'intégration. Grâce à l'efficacité de calcul du modèle symbolique de la dynamique directe, la procédure de simulation est réalisée dans des délais très courts.

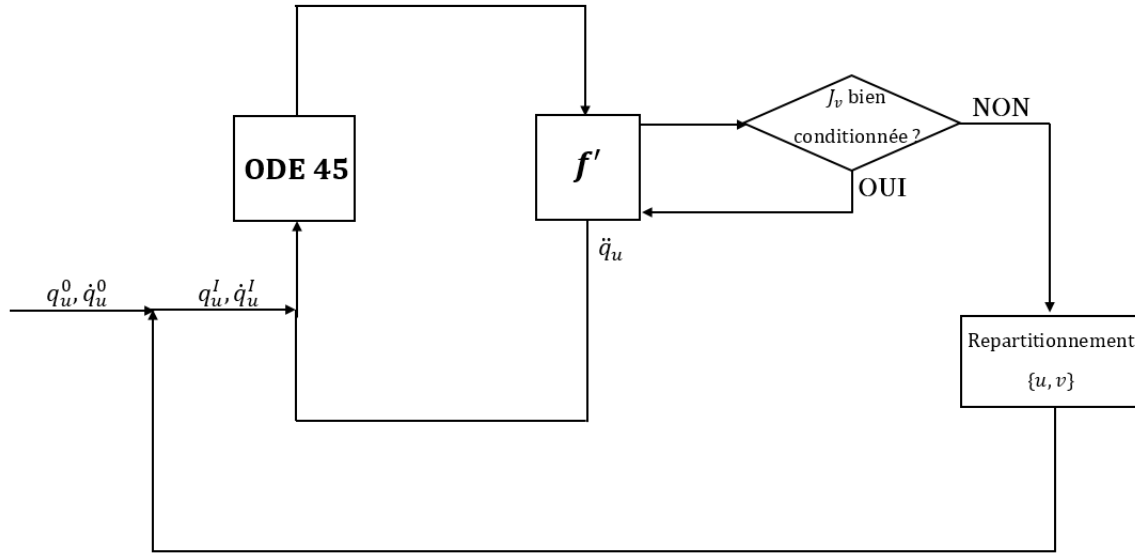


FIGURE 5.1 – Algorithme développé afin de résoudre les problèmes liés aux singularités

L'intégrateur **ODE45** fait appel à la fonction **f'** afin de calculer, à chaque pas de temps, l'accélération des coordonnées généralisées indépendantes \ddot{q}_u à partir des positions et accélérations q_u et \dot{q}_u . Cette fonction permet également de déterminer q_v , \dot{q}_v et \ddot{q}_v .

A chaque pas de temps, le contrôleur vérifie si la matrice J_v est bien conditionnée. La jacobienne J_v est dite mal conditionnée lorsque son conditionnement est supérieur à un seuil fixé par l'utilisateur. Le conditionnement d'une matrice inversible est donné par la formule suivante :

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \|A\|, \kappa(A) \geq 1 \quad (5.1)$$

Lorsque κ est proche de 1, cela signifie que le système en question est bien conditionné. Il n'existe cependant pas de valeur exacte qui indique que le système est mal conditionné, et qu'il rencontre donc singularité. C'est à l'utilisateur de désigner la valeur à partir de laquelle il estime que son système se trouve dans une mauvaise configuration, et encourt donc des risques au niveau des calculs numériques. On verra d'ailleurs par la suite quelle valeur est optimale pour les cas étudiés. Une valeur proche de l'unité occasionnera un nombre trop important de repartitionnements de coordonnées, rendant ainsi le temps d'exécution de la simulation extrêmement long. D'un autre côté, une valeur trop élevée pourrait engendrer des erreurs au niveau des calculs numériques. Au-delà d'une certaine valeur, la simulation devient même impossible puisque l'algorithme de Newton-Raphson ne parvient pas à converger.

Au cours de la simulation, une fois le seuil dépassé, c'est-à-dire lorsque le système est proche d'une singularité, ce dernier est dès lors soumis à un repartitionnement de ses coordonnées. Pour des systèmes complexes, cette opération peut être répétée plus d'une centaine de fois pour une simulation de quelques secondes seulement. On comprend dès lors l'intérêt de déterminer la valeur adéquate du seuil de conditionnement.

Il est également important de noter que pour chaque partitionnement des coordonnées du système, il n'existe pas seulement un seul et unique ensemble $\{u, v\}$ permettant de poursuivre la simulation sans erreur de calcul. Néanmoins, l'algorithme implémenté dans le cadre de ce travail se base sur la factorisation LU mentionnée auparavant, assurant ainsi un choix idéal des coordonnées indépendantes q_u et dépendantes q_v .

5.2 Système bielle-manivelle

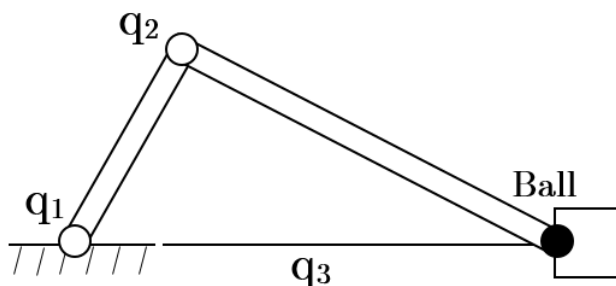


FIGURE 5.2 – Système bielle-manivelle

Le système bielle-manivelle permet la transformation du mouvement de rotation de la manivelle en un mouvement de translation au niveau du piston, situé à l'extrémité de la bielle. Le schéma multicorps du système est repris sur la figure 5.2. Il comprend deux articulations rotoïdes q_1 et q_2 et une articulation prismatique q_3 . Afin de restaurer une topologie arborescente au système multicorps, une coupure de type ball est réalisée entre la bielle et le piston. La structure comporte un seul degré de liberté puisque le système admet trois coordonnées généralisées tandis que la coupure implique deux équations de contrainte¹. Il en résulte donc deux variables dépendantes de la troisième coordonnée. Trois choix de partitionnement s'offrent dès lors à l'utilisateur :

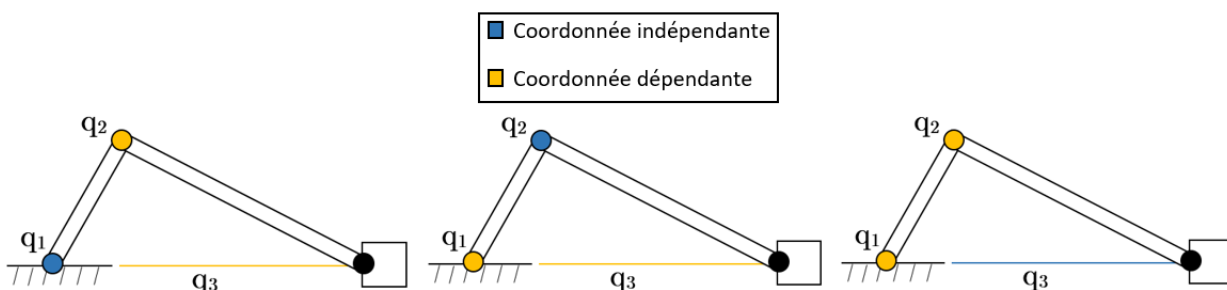


FIGURE 5.3 – Ensemble des choix pour les coordonnées dépendantes et indépendantes

1. La coupure de type ball engendre, dans ce cas-ci, uniquement deux contraintes puisqu'il s'agit d'un cas en deux dimensions.

Au cours de son mouvement, la rotation de la manivelle donne au piston une certaine vitesse :

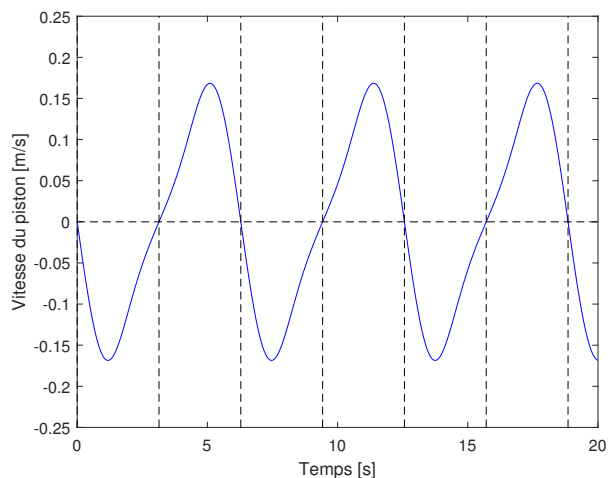


FIGURE 5.4 – Vitesse du piston au cours du mouvement du système

Le graphe suivant illustre le conditionnement de la matrice jacobienne $J_v(i, j)$ en fonction de l'évolution du système. Les indices i et j correspondent aux variables articulaires associées, dépendant donc de la troisième coordonnée généralisée. L'indice 1 se rapporte à la rotation de la manivelle, 2 à la rotation de la bielle tandis que l'indice 3 se rapporte à la translation du piston.

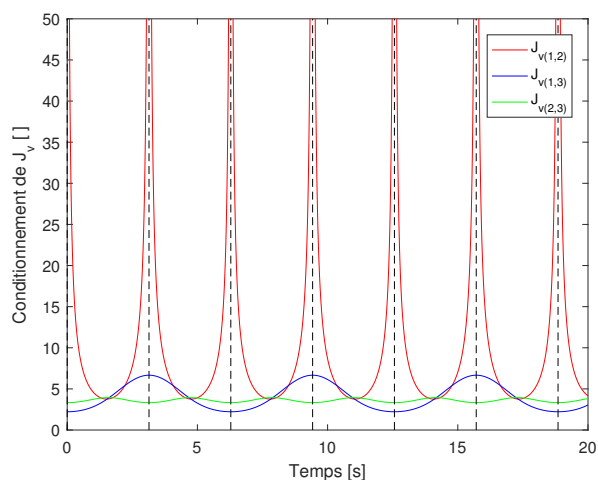


FIGURE 5.5 – Conditionnement des sous-matrices jacobiennes J_v

On observe un très mauvais conditionnement de la sous-matrice jacobienne $J_v(1, 2)$ à plusieurs reprises lors du mouvement du système. Ces positions particulières correspondent à l'instant où la vitesse du piston est nulle, c'est-à-dire lorsque la bielle et la manivelle sont parfaitement alignées. Au cours d'une rotation complète de la manivelle, le système rencontre donc deux singularités, dans le cas où la translation du piston correspond à la variable indépendante. En effet, le conditionnement de $J_v(1, 3)$ et $J_v(2, 3)$ n'atteint quant à lui jamais de valeur excessive lors du mouvement du système.

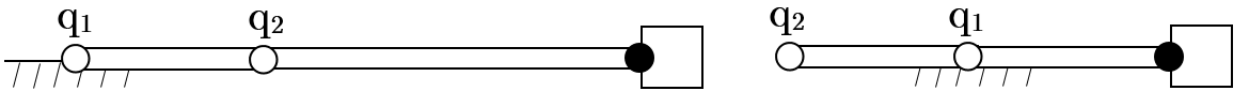


FIGURE 5.6 – Positions d'alignement de la bielle et de la manivelle

Lorsque le système se trouve dans la première position d'alignement, la jacobienne des contraintes est la suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -0.45 & -0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$J_v(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.45 & -0.3 \end{pmatrix}$$

n'est donc pas de plein rang, et est donc singulière.

Afin d'éviter tout problème lié au mauvais conditionnement de la matrice, dans le cas où q_3 correspond à la coordonnée généralisée indépendante, il est dès lors nécessaire d'effectuer un repartitionnement des coordonnées du système avant la position d'alignement de la bielle et de la manivelle. On peut notamment désigner q_1 , c'est-à-dire la rotation de la manivelle, comme variable indépendante.

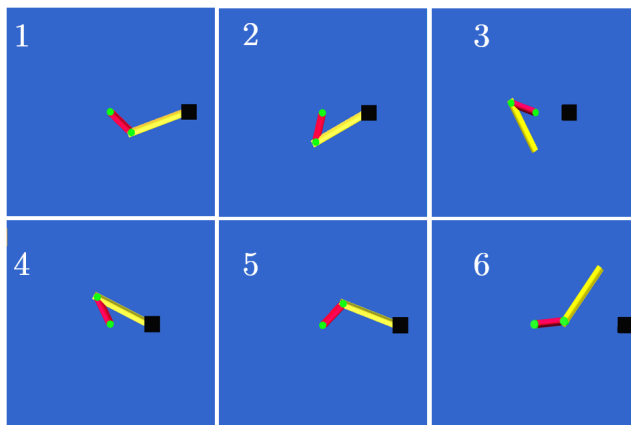


FIGURE 5.7 – Mouvement du système sans repartitionnement de coordonnées

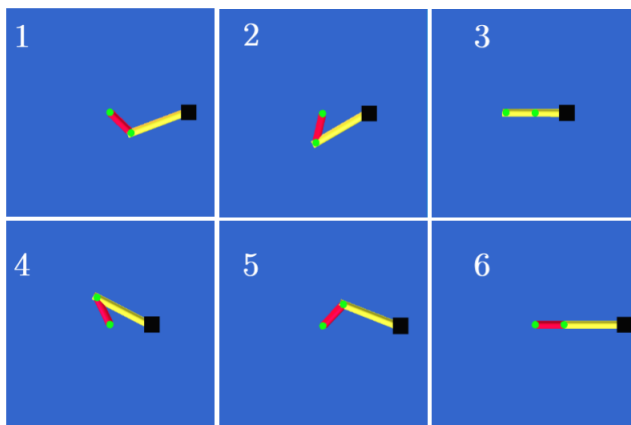


FIGURE 5.8 – Mouvement du système avec repartitionnement de coordonnées

La première série de snapshots correspond au mouvement du système sans repartitionnement de coordonnées, avec q_3 comme coordonnée indépendante, tandis que la deuxième séquence coïncide au comportement du système dans le cas où ce dernier est soumis à un repartitionnement de coordonnées lorsqu'il se trouve dans une configuration proche d'une singularité cinématique. On remarque donc l'importance du choix des coordonnées $\{q_u, q_v\}$. Les singularités impliquent des discontinuités dans le mouvement de système. Un mauvais conditionnement de la matrice J_v peut, notamment, compromettre la fermeture d'une boucle. Pour le système bielle-manivelle, un seul repartitionnement est nécessaire puisque le système rencontre des problèmes uniquement dans le cas où la translation du piston correspond à la variable indépendante.

5.3 Robot parallèle planaire

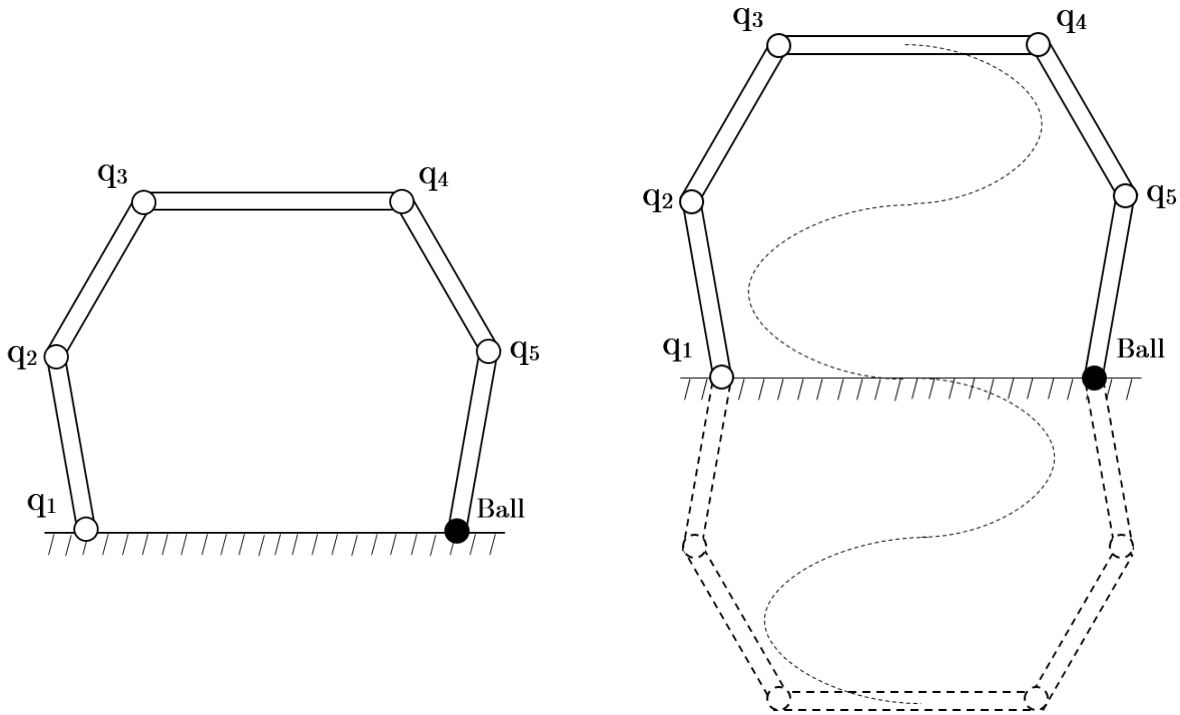


FIGURE 5.9 – Topologie et trajectoire du robot parallèle planaire

La représentation multicorps du robot parallèle planaire, ainsi que sa trajectoire, est reprise sur la figure 5.9. Le système multicorps comporte cinq barres de taille et de masse identiques, reliées entre elles par des articulations rotoïdes, notées $q_1 \dots q_5$. La liaison entre la barre située à l'extrémité droite et le bâti est assurée par une coupure de type ball afin de ramener le système à sa topologie arborescente équivalente. La structure comporte trois degrés de liberté, et admet donc trois coordonnées généralisées indépendantes. La trajectoire empruntée par le robot est imprédictible, le système oscille entre les deux positions extrêmes, rendant ainsi le robot exposé à de nombreuses positions singulières. Le choix des variables indépendantes et dépendantes se révèle ici plus complexe que dans le cas du système bielle-manivelle décrit précédemment. Lorsque le robot se trouve dans une mauvaise configuration, le repartitionnement des coordonnées est d'autant plus compliqué.

Lors de l'étude du système bielle-manivelle, on a remarqué que les problèmes liés aux singularités cinématiques avaient lieu uniquement lorsque la translation du piston était choisie comme variable indépendante du système. Dans le cas du robot parallèle, il existe une multitude de positions dans lesquelles le système est mal conditionné, et ce pour plusieurs configurations $\{u, v\}$ différentes. Lors de son mouvement, le robot est sujet à de nombreuses singularités cinématiques, notamment dans les dispositions suivantes :

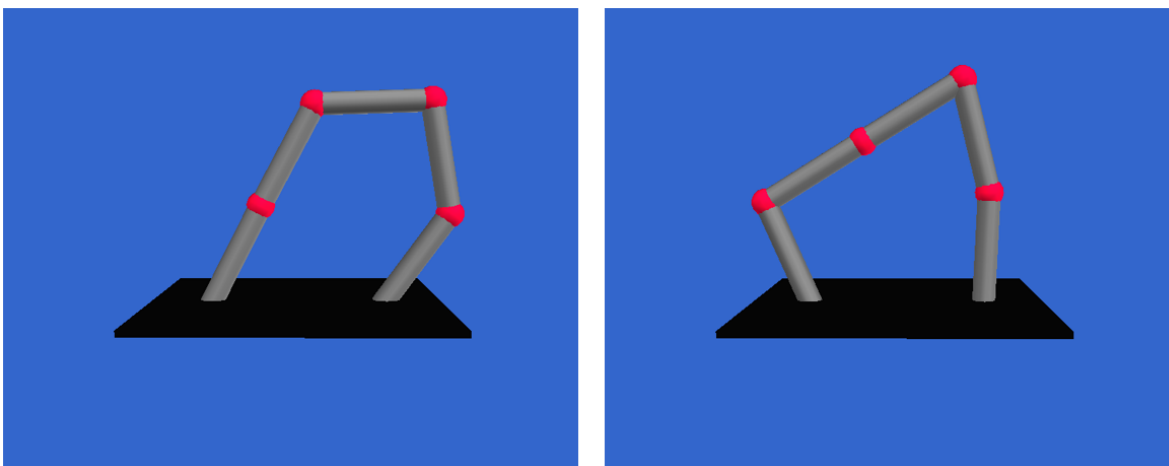


FIGURE 5.10 – Exemples de singularités du système

Dans ce cas-ci, il ne suffit pas de permuter une seule et unique fois les variables indépendantes et dépendantes au cours de la simulation afin de résoudre les problèmes dûs aux singularités, comme pour le premier système étudié. En effet, en fonction de la limite de conditionnement fixée par l'utilisateur, le programme peut réaliser jusqu'à plusieurs centaines de repartitionnement de coordonnées pour une simulation de quelques secondes seulement. On verra d'ailleurs par la suite l'influence du seuil de conditionnement sur le nombre de repartitionnements effectués ainsi que sur le temps d'exécution du programme.

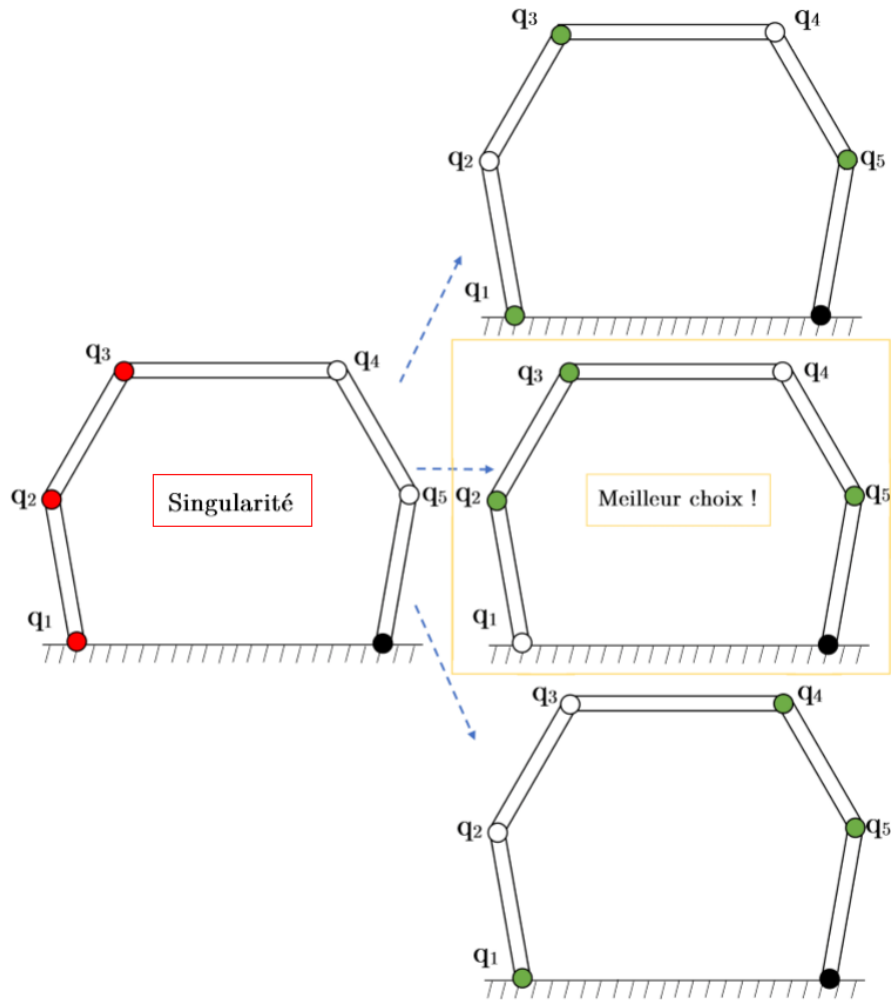


FIGURE 5.11 – Partitionnement des coordonnées lors d’une singularité

Dans le cas d’une singularité², il est nécessaire d’effectuer un repartitionnement des coordonnées du système. Plusieurs choix d’ensembles de coordonnées $\{q_u, q_v\}$ convenables s’offrent à l’utilisateur. Cependant, le programme implémenté dans le cadre de ce mémoire fait en sorte, dans chacune de ces situations, de choisir le meilleur partitionnement $\{u, v\}$, c’est-à-dire le partitionnement conduisant au meilleur conditionnement de la matrice J_v . Ainsi, l’algorithme assure une assignation idéale des coordonnées pour le calcul numérique des vitesses et accélérations du système tout au long de la simulation.

². Ou plutôt lorsque le système se trouve dans une pose proche d’une position singulière, afin d’éviter tout risque potentiel.

Le graphe suivant reprend l'évolution de l'articulation q_3 au cours d'un mouvement de 5 secondes. On observe le mouvement hasardeux du système, donnant ainsi lieu à de nombreuses positions de singularité.

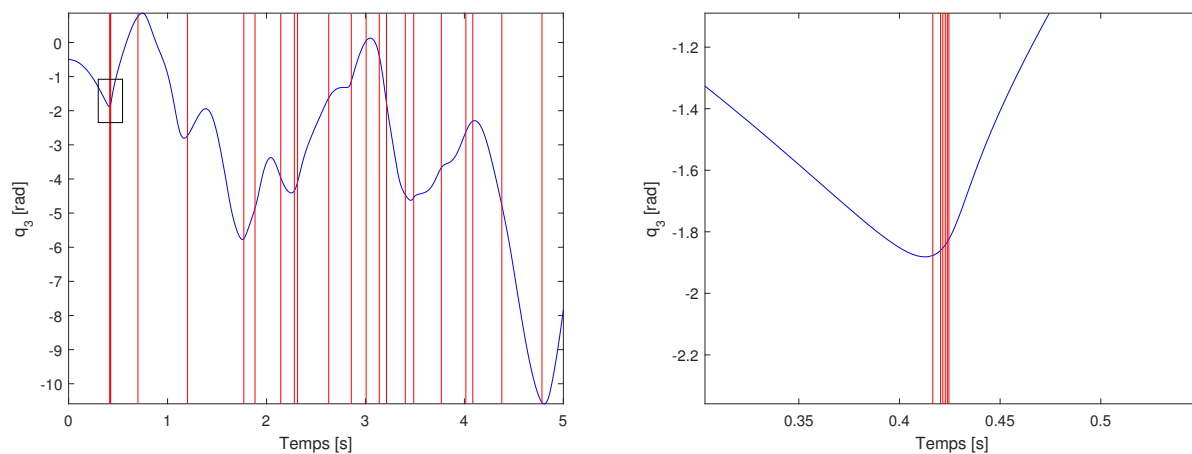


FIGURE 5.12 – Evolution de q_3 au cours du mouvement du système

Les droites rouges correspondent aux différents repartitionnements de coordonnées. Le seuil de conditionnement a été fixé, pour cette simulation, à 10. On remarque une succession de repartitionnements vers 0, 4s. A cet instant, le système se trouve dans une disposition où les positions de singularité s'enchainent malgré les différents changements de configuration $\{u, v\}$.

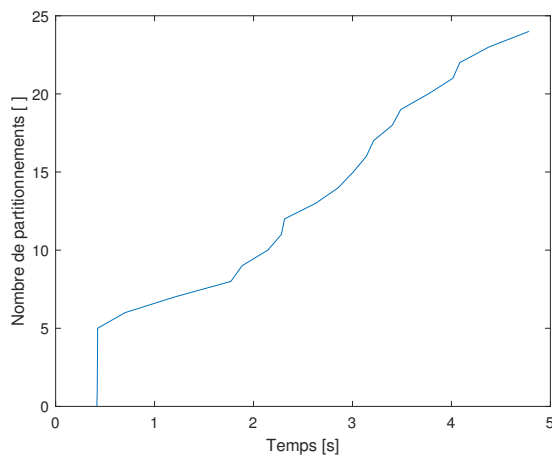


FIGURE 5.13 – Nombre de repartitionnements en fonction du temps

5.3.1 Influence du seuil de conditionnement sur le nombre de repartitionnements de coordonnées

Le tableau³ suivant reprend le nombre de repartitionnements de coordonnées effectués par le programme pour différentes valeurs du seuil de conditionnement, pour une simulation de 5 secondes. Lorsque le seuil de conditionnement est fixé à 16, le calcul des positions, vitesses et accélérations du système est impossible puisque la méthode de Newton-Raphson ne converge pas dans ce cas.

cond	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n	3289	2170	711	488	304	293	290	289	127	122	25	24	20	18	17

Ces valeurs sont reprises sur le graphe ci-dessous.

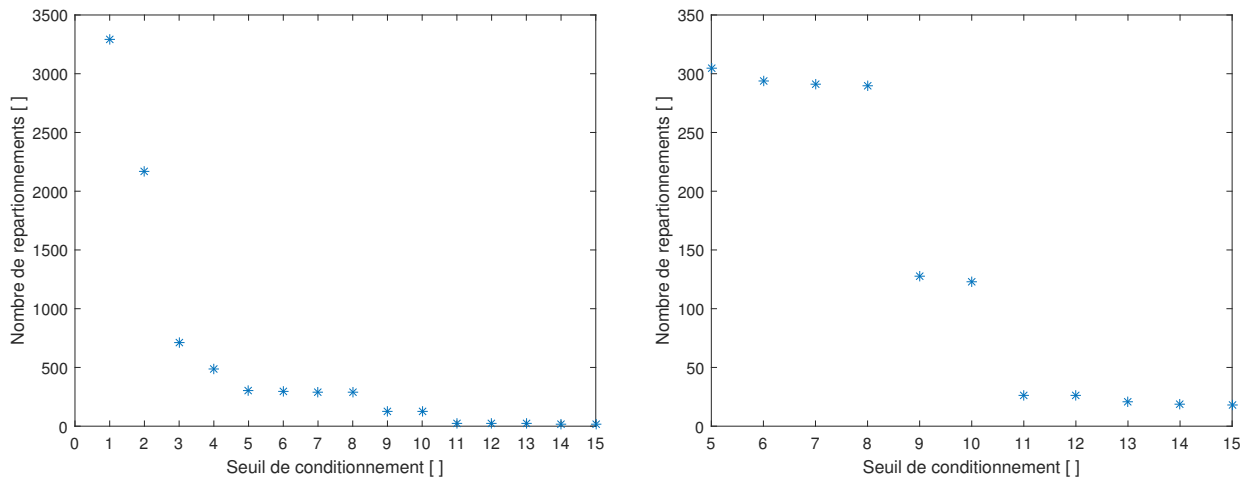


FIGURE 5.14 – Nombre de repartitionnements en fonction du seuil de conditionnement

Le nombre de repartitionnements décroît très fortement pour des petits seuils de conditionnements. Pour des valeurs plus importantes, on observe des paliers. Pour plusieurs seuils successifs, le nombre de repartitionnements reste plus ou moins le même.

3. **cond** correspond au seuil de conditionnement fixé par l'utilisateur tandis que **n** correspond au nombre de repartitionnement réalisés au cours de la simulation.

On note ici l'importance du choix de la valeur de conditionnement à partir de laquelle on souhaite effectuer un repartitionnement des coordonnées du système. Une valeur faible entraîne un nombre de repartitionnements très important, et donc énormément de calculs, tandis qu'un nombre trop élevé comporte des risques quant à la réussite de la simulation. L'objectif est donc de choisir le bon compromis entre les valeurs extrêmes.

Les graphes suivants reprennent les l'évolution de la coordonnée q_3 ainsi que les temps de répartitions des coordonnées pour un seuil de conditionnement fixé respectivement à 5, 10 et 15.

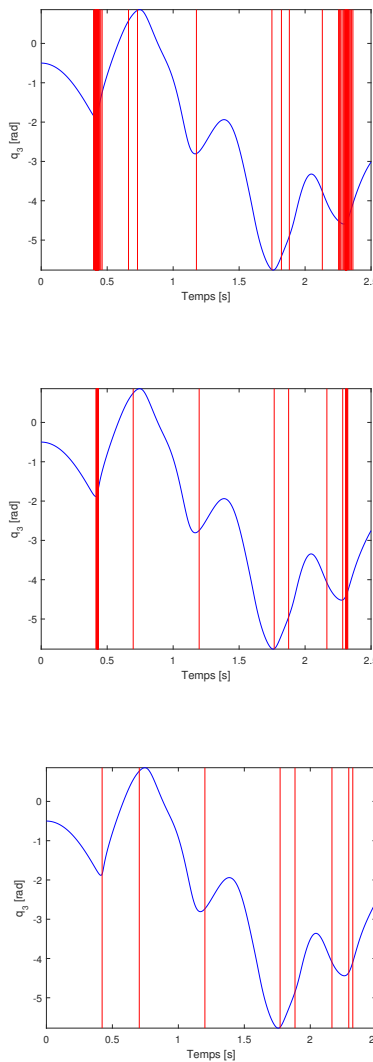


FIGURE 5.15 – q_3 pour un seuil de conditionnement fixé respectivement à 5, 10 et 15

On remarque que les zones de successions de repartitionnements sont nettement plus marquées pour des seuils de conditionnement plus faibles. Malgré la différence considérable du nombre de repartitionnements, on constate que le mouvement du système est bien le même dans les trois cas.

5.3.2 Influence du seuil de conditionnement sur le temps d'exécution

Le tableau⁴ suivant reprend le temps d'exécution du programme pour différentes valeurs du seuil de conditionnement.

cond	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t [s]	78,8	55,2	24,3	19,2	12,2	11,1	10,9	10,8	8,1	7,9	6,2	6,1	5,9	5,8	5,6

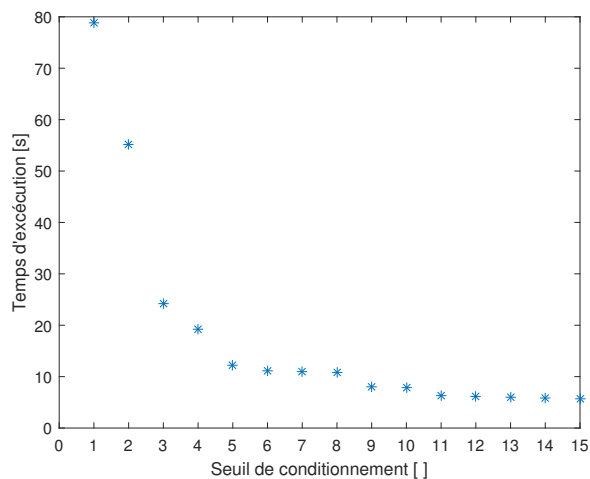


FIGURE 5.16 – Temps d'exécution en fonction du seuil de conditionnement

On observe, sans surprise, le même comportement que pour le nombre de repartitionnements. Les deux graphes possèdent la même allure globale. Il existe évidemment une corrélation entre le nombre de repartitionnements et le temps d'exécution puisque le temps de calcul lié aux nombreuses factorisations LU n'est pas négligeable.

4. **t** correspond au temps d'exécution du programme.

5.4 Plateforme de Stewart

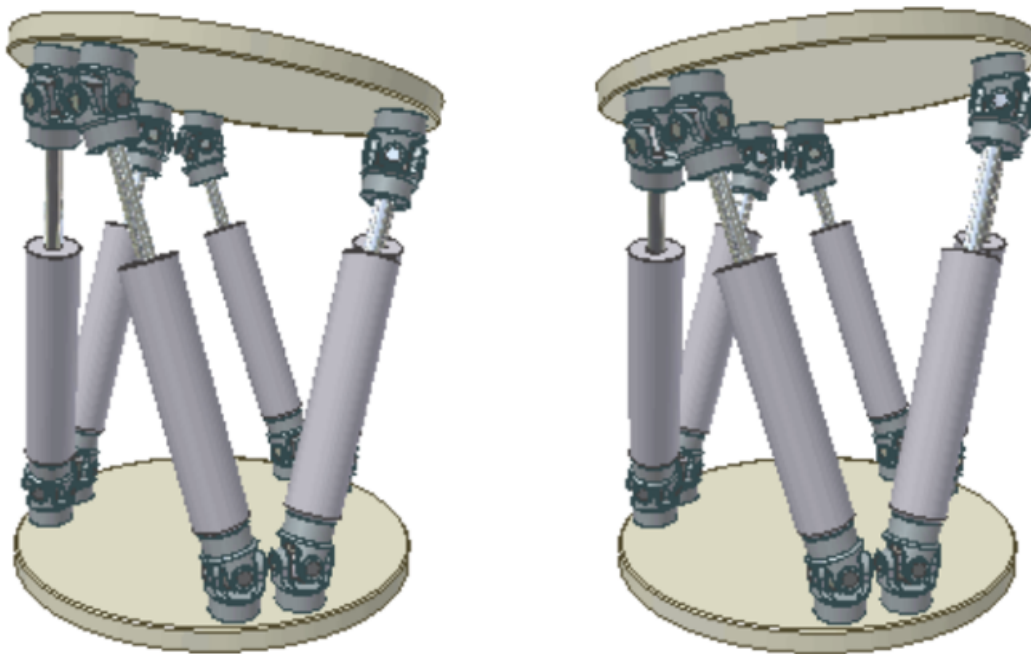


FIGURE 5.17 – Plateforme de Stewart ⁵

La plateforme de Stewart[4], également connue sous le nom de plateforme hexapode, est un robot parallèle constitué de six actionneurs linéaires. Il s'agit, dans la plupart des cas, de vérins hydrauliques ou d'actionneurs électriques. Ceux-ci sont disposés deux à deux sur la plateforme inférieure et forment également des paires sur la plateforme supérieure. Le système possède six degrés de liberté : les trois translations de la plateforme mobile selon x , y et z ainsi que les angles de tangage, de roulis et de lacet. L'orientation du plateau supérieur est définie par la longueur de chacune des jambes. La commande des six actionneurs permet de lui imposer la position souhaitée. Contrairement aux autres systèmes multicorps détaillés précédemment, il s'agit ici d'un cas en trois dimensions.

5. Image tirée de http://www.robot.wikibis.com/plateforme_stewart.php

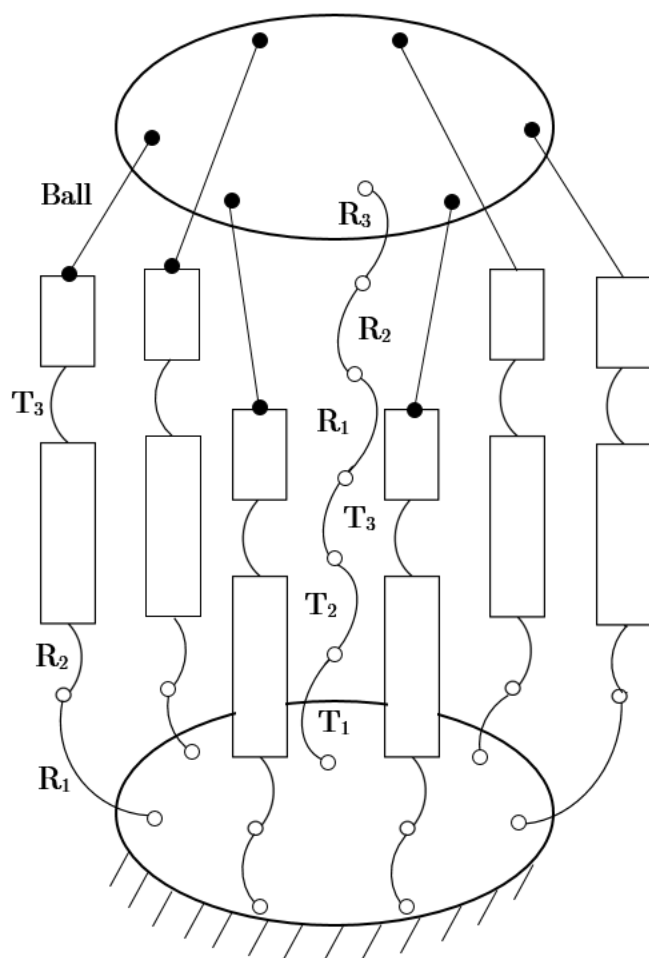


FIGURE 5.18 – Modification de la séquence de rotations

Le modèle multicorps de la plateforme de Stewart est repris sur la figure 5.18. Par soucis de clarté, tous les types d'articulation n'ont pas été indiqués⁶. On remarque que le système possède bien six degrés de liberté. En effet la chaîne cinématique reliant les deux plateformes comporte six articulations tandis que la contrainte de type ball compense, en quelque sorte, les trois articulations présentes au sein de chacune des jambes. Il s'agit cependant d'un raisonnement simplificateur : les coordonnées indépendantes ne correspondent pas forcément à la chaîne raccordant les deux corps.

6. Il s'agit de la même séquence d'articulations pour chaque jambe.

Le graphe suivant reprend l'évolution de q_{13} au cours d'un mouvement de 10 secondes. La coordonnée généralisée q_{13} correspond à une articulation de type R_1 au pied d'une jambe. Le seuil de conditionnement a été fixé, dans le cadre de cette simulation, à 10.

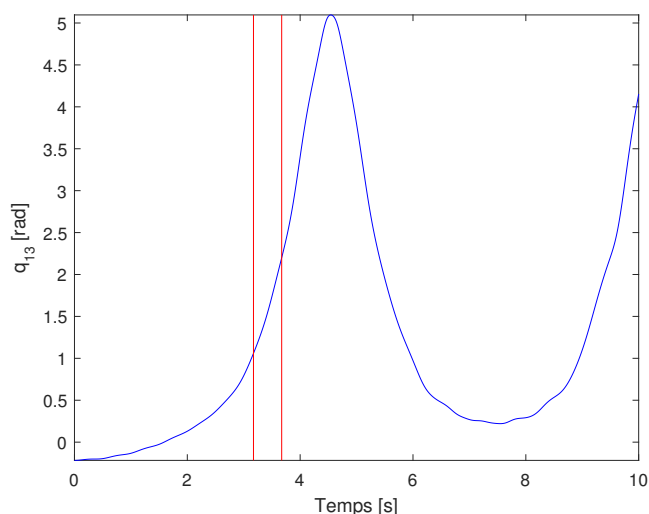


FIGURE 5.19 – Evolution de q_{13} au cours du mouvement du système

Le résultat semble assez surprenant. En effet, le programme n'a effectué que 2 repartitionnements de coordonnées sur toute la durée de la simulation. C'est le cas pour chaque simulation réalisée avec un seuil de conditionnement supérieur à 3. Pour un seuil fixé à une valeur plus faible, c'est-à-dire 1 ou 2, on observe par contre plus de 2000 repartitionnements. Cependant, une matrice dont le conditionnement est si faible est en réalité bien conditionnée. Ces repartitionnements ne sont dès lors pas nécessaires et ne font qu'augmenter inutilement le nombre de calculs effectués au cours de la simulation.

On pourrait donc croire que le mouvement emprunté par le système est un cas particulier, avec très peu de positions singulières. D'autres tests ont été réalisés, pour des configurations $\{u, v\}$ et des conditions initiales différentes. Le résultat est le même dans chaque cas : un ou deux repartitionnements de coordonnées, seulement. Il ne s'agit donc pas ici d'un mouvement remarquable.

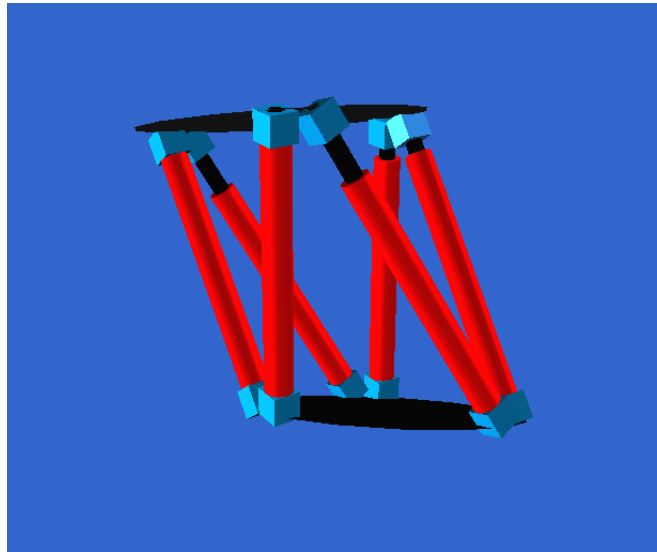


FIGURE 5.20 – Modélisation de la plateforme de Stewart sur Robotran

Ce résultat s'explique par le fait que la plateforme de Stewart est un système multicorps en trois dimensions. Dès lors, la structure rencontre très peu de singularités au cours de son mouvement contrairement à d'autres systèmes, comme le robot parallèle planaire, notamment. Dans le cas d'un système en deux dimensions, le système est en quelque sorte certain de passer par des positions dites singulières. Cela ne signifie cependant pas que le programme est inutile pour des systèmes en trois dimensions, puisqu'ils peuvent, eux aussi, rencontrer des singularités, bien qu'elles soient moins fréquentes. Sans repartitionnement de coordonnées, les calculs numériques seraient dès lors impossibles, la méthode de Newton-Raphson ne convergeant pas.

6 Singularité cinématique dans une séquence de rotations

Il existe un autre type de singularité cinématique, dans le cas d'une séquence de trois rotations. On peut représenter une succession de trois rotations R_1 , R_2 et R_3 comme suit :

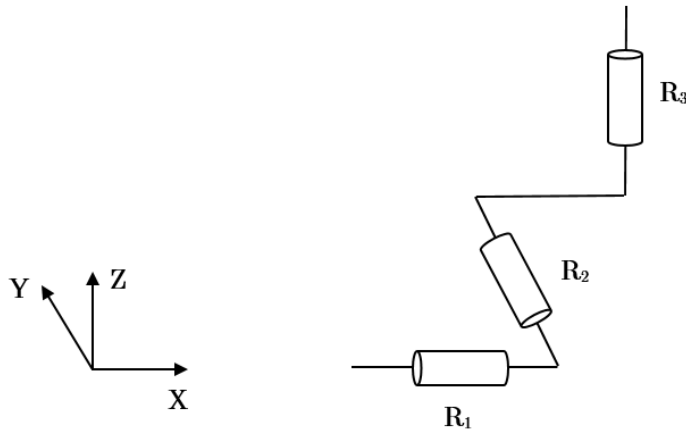


FIGURE 6.1 – Séquence de rotations $R_1 - R_2 - R_3$

Dans le cas où la rotation R_2 vaut exactement $\pi/2$, le schéma devient le suivant :

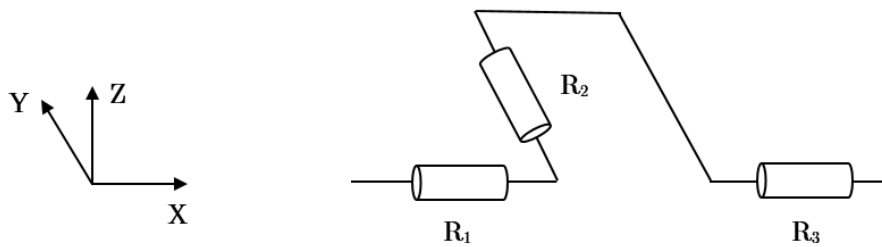


FIGURE 6.2 – Séquence de rotations $R_1 - R_2 - R_3$ lorsque la rotation R_2 vaut $\pi/2$

R_1 et R_3 sont dès lors alignés.

On peut représenter le cas où R_2 est égal $\pi/2$ de la façon suivante :

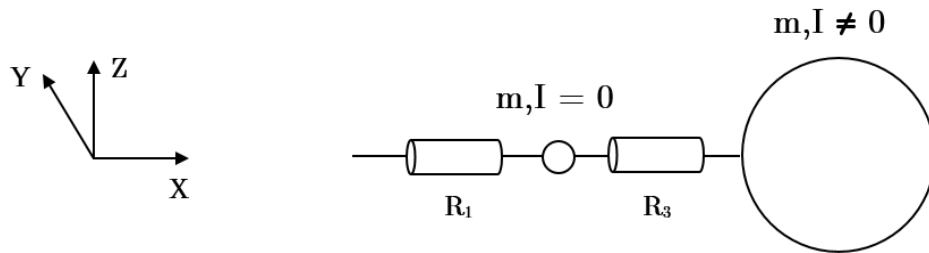


FIGURE 6.3

L'alignement des deux rotations induit une perte de mobilité cinématique. Cette configuration particulière engendre en fait la dégénération d'un degré de liberté. Elle conduit inévitablement à la singularité de la matrice de masse M qui peut être visualisée sur la figure 6.3 au travers d'une masse, et donc une inertie, nulle dans la direction $R_1 - R_3$. Ce mouvement n'existe évidemment pas en mécanique puisque il n'implique ni masse ni inertie. Ce type de singularité est qualifié dans la littérature de singularité mathématique. Il ne s'agit naturellement pas ici d'une singularité cinématique due aux contraintes de boucle comme vu précédemment.

6.1 Méthode de résolution

Afin d'éviter ces problèmes, il est essentiel de modifier l'ordre de la séquence de rotations. Dans cette optique, on peut, par exemple, dès que l'angle intermédiaire, noté q_2 , d'une succession de rotations $R_1 - R_2 - R_3$ se rapproche de $\pi/2$, passer à un système où la suite des rotations correspond à $R_2 - R_3 - R_1$.

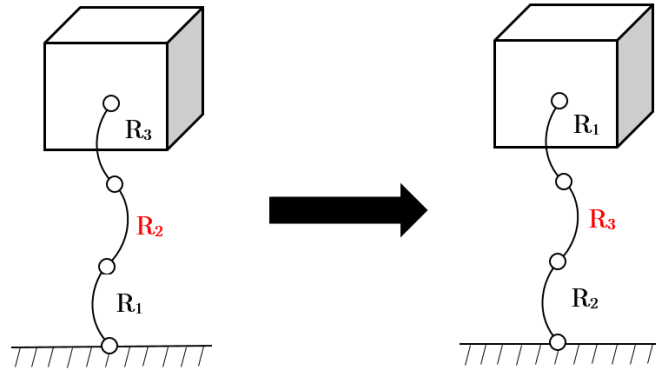


FIGURE 6.4 – Modification de la séquence de rotations

On considère deux successions de rotations. Le système possède une vitesse non nulle selon R_2 . Après un court instant, la coordonnée généralisée q_2 avoisine $\pi/2$:

$$|q_2 - \frac{\pi}{2}| < \epsilon, \text{ avec } \epsilon \sim 0.1$$

A cet instant, la simulation est interrompue, étant donné le risque encouru. On va dès lors poursuivre la simulation à partir de la seconde séquence de rotations. On reprend en fait la simulation à partir d'un autre fichier MBS. Il y a donc deux simulations consécutives. Il est nécessaire de déterminer les angles et vitesses correspondant à la deuxième série d'articulations. Soit $\theta = [\theta_1 \theta_2 \theta_3]^T$ les trois coordonnées du premier système et $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]^T$ celles du deuxième dispositif. On doit alors déterminer :

$$\begin{pmatrix} \theta_1^F \\ \theta_2^F \\ \theta_3^F \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1^I \\ \alpha_2^I \\ \alpha_3^I \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1^F \\ \dot{\theta}_2^F \\ \dot{\theta}_3^F \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^I \\ \dot{\alpha}_2^I \\ \dot{\alpha}_3^I \end{pmatrix}$$

6.2 Rotation d'une base

La matrice d'une rotation d'un angle α autour de l'axe $\hat{\mathbf{x}}$ s'écrit :

$$R(\hat{\mathbf{x}}, \alpha) = R^{(1)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Celle d'un angle β autour de l'axe $\hat{\mathbf{y}}$ s'écrit :

$$R(\hat{\mathbf{y}}, \beta) = R^{(2)}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Celle d'un angle γ autour de l'axe $\hat{\mathbf{z}}$ s'écrit :

$$R(\hat{\mathbf{z}}, \gamma) = R^{(3)}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

L'orientation d'une base par rapport une autre base peut toujours être obtenue à partir de trois rotations élémentaires. La matrice de rotation sera alors égale au produit des matrices de rotation successives, soit :

$$R = R(\gamma)R(\beta)R(\alpha)$$

Par exemple, la matrice d'une séquence de rotations selon $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, et $\hat{\mathbf{z}}$ équivaut à :

$$\begin{aligned} R &= R^{(3)}(\gamma) R^{(2)}(\beta) R^{(1)}(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta \cos\gamma & \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \cos\alpha \sin\gamma & \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma \\ \cos\beta \sin\gamma & \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma & \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma - \sin\alpha \cos\gamma \\ -\sin\beta & \sin\alpha \cos\beta & \cos\alpha \cos\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.3 Résolution de la singularité

On considère les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 1.4 \\ \theta_3 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1 = 0 \\ \dot{\theta}_2 = 0.1 \\ \dot{\theta}_3 = 0.1 \end{cases} \quad (6.4)$$

Lorsque θ_2 avoisine $\pi/2$, la simulation est interrompue. A cet instant, on a :

$$\begin{cases} \theta_1 = -0.0255 \\ \theta_2 = 1.4711 \\ \theta_3 = 0.0965 \end{cases} \quad (6.5)$$

Afin de poursuivre la simulation selon la deuxième séquence de rotations, il est indispensable de déterminer les trois angles s'y rapportant. Dans un premier temps, on détermine la matrice de rotation se rapportant à $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$:

$$\begin{aligned} R_\theta &= R^{(3)}(\theta_3) R^{(2)}(\theta_2) R^{(1)}(\theta_1) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \cos\theta_3 & \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 - \cos\theta_1 \sin\theta_3 & \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \sin\theta_3 \\ \cos\theta_2 \sin\theta_3 & \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_3 & \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_3 \\ -\sin\theta_2 & \sin\theta_1 \cos\theta_2 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0991 & -0.1215 & 0.9876 \\ 0.0096 & 0.9926 & 0.1211 \\ -0.9950 & -0.0025 & 0.0995 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de rotation ainsi obtenue à la fin de la première simulation est identique à la matrice de rotation coïncidant au début de la deuxième simulation. En effet, l'orientation initiale du second système correspond exactement à l'orientation finale du premier :

$$R_\theta = R_\alpha$$

L'expression de R_α est la suivante :

$$\begin{aligned} R_\alpha &= R^{(1)}(\alpha_3) R^{(3)}(\alpha_2) R^{(2)}(\alpha_1) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 & \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 & \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 - \cos\alpha_1 \sin\alpha_3 \\ \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 - \sin\alpha_1 \cos\alpha_3 & \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 & \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A partir de cette expression, il est possible de déterminer la valeur de $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$.

Afin de simplifier les différents termes, on réécrit R_α sous la forme :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

On détermine les angles recherchés à partir de relations trigonométriques :

$$\begin{cases} \tan(\alpha_1) = \frac{R_{13}}{R_{11}} & \Leftrightarrow \alpha_1 = \arctan\left(\frac{R_{13}}{R_{11}}\right) = 1.4708 \\ \sin(\alpha_2) = -R_{12} & \Leftrightarrow \alpha_2 = \arcsin(-R_{12}) = 0.1218 \\ \tan(\alpha_3) = \frac{R_{32}}{R_{22}} & \Leftrightarrow \alpha_3 = \arctan\left(\frac{R_{32}}{R_{22}}\right) = -0.0026 \end{cases} \quad (6.6)$$

On remarque cependant qu'il ne s'agit pas de la solution unique pour α . On aurait, par exemple, pu prendre $\alpha_2 = \pi - \arcsin(-R_{12})$, puisque deux angles supplémentaires possèdent le même sinus. Il existe donc plusieurs solutions qui engendrent la même matrice de rotation.

Afin de vérifier l'exactitude des résultats on doit s'assurer que les deux matrices de rotations sont bien égales :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 0.0991 & -0.1215 & 0.9876 \\ 0.0096 & 0.9926 & 0.1211 \\ -0.9950 & -0.0025 & 0.0995 \end{pmatrix} = R_\theta$$

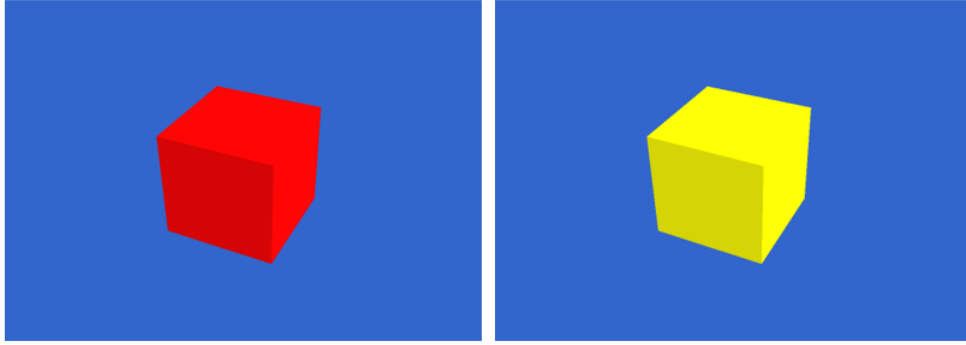


FIGURE 6.5 – Orientation finale du premier système et initiale du deuxième système

Il est également intéressant d'observer la particularité du système dans le cas où $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Pour ce faire, reprenons l'expression de R_{θ} :

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_3 & \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 - \cos\theta_1\sin\theta_3 & \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 + \sin\theta_1\sin\theta_3 \\ \cos\theta_2\sin\theta_3 & \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 + \cos\theta_1\cos\theta_3 & \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 - \sin\theta_1\cos\theta_3 \\ -\sin\theta_2 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

On considère le cas où $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$\begin{cases} R_{12} = \sin(\theta_1)\cos(\theta_3) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_3) = \sin(\theta_1 - \theta_3) \\ R_{13} = \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_3) = \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ R_{22} = \sin(\theta_1)\sin(\theta_3) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) = \cos(\theta_1 - \theta_3) = R_{13} \\ R_{23} = \cos(\theta_1)\sin(\theta_3) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_3) = -\sin(\theta_1 - \theta_3) = -R_{12} \end{cases} \quad (6.7)$$

Dès lors, toute paire $\{\theta_1, \theta_3\}$ vérifiant ces équations est une solution. En reprenant les équations pour R_{12} et R_{13} , on obtient :

$$\begin{aligned} (\theta_1 - \theta_3) &= \arctan\left(\frac{R_{12}}{R_{13}}\right) \\ \theta_1 &= \theta_3 + \arctan\left(\frac{R_{12}}{R_{13}}\right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Il existe donc une corrélation entre θ_1 et θ_3 . Ce cas particulier correspond à la singularité cinématique décrite. Il y a, dans ce cas, une infinité de solutions. Il suffit de fixer une valeur pour θ_1 et de déterminer alors θ_3 en fonction, et inversement.

Il faut à présent déterminer les vitesses $\dot{\alpha} = [\dot{\alpha}_1 \ \dot{\alpha}_2 \ \dot{\alpha}_3]^T$.

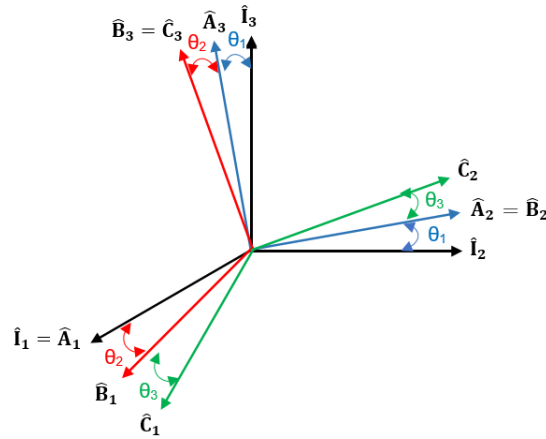


FIGURE 6.6 – Angles de Tait-Bryan

Afin d'exprimer la vitesse angulaire du corps, on a besoin des relations entre les différentes bases intermédiaires[5]. La base orthonormée liée au corps est notée $\{\hat{\mathbf{C}}\}$. L'orientation de $\{\hat{\mathbf{C}}\}$ par rapport à la base inertielle $\{\hat{\mathbf{I}}\}$ se fait par trois rotations successives. Une rotation θ_1 autour de $\hat{\mathbf{I}}_1$ met la base $\{\hat{\mathbf{I}}\}$ en coincidence avec une base intermédiaire $\{\hat{\mathbf{A}}\}$. Une rotation θ_2 autour de $\hat{\mathbf{A}}_2$ met la base $\{\hat{\mathbf{A}}\}$ en coincidence avec une seconde base intermédiaire $\{\hat{\mathbf{B}}\}$. Finalement, une rotation θ_3 autour de $\hat{\mathbf{B}}_3$ fait coincider la base $\{\hat{\mathbf{B}}\}$ avec $\{\hat{\mathbf{C}}\}$

On a donc les relations suivantes entre les bases successives :

$$[\hat{\mathbf{A}}] = R^{(1)}(\theta_1) [\hat{\mathbf{I}}], [\hat{\mathbf{B}}] = R^{(2)}(\theta_2) [\hat{\mathbf{A}}] \text{ et } [\hat{\mathbf{C}}] = R^{(3)}(\theta_3) [\hat{\mathbf{B}}]$$

Comme mentionné précédemment, la matrice de rotation R est égale au produit des matrices de rotation successives, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} R_\theta &= R(\theta_3) R(\theta_2) R(\theta_1) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \cos\theta_3 & \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 - \cos\theta_1 \sin\theta_3 & \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \sin\theta_3 \\ \cos\theta_2 \sin\theta_3 & \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + \cos\theta_1 \cos\theta_3 & \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_3 \\ -\sin\theta_2 & \sin\theta_1 \cos\theta_2 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut écrire les relations suivantes entre les bases :

$$\begin{aligned}
 [\hat{\mathbf{C}}] &= R(\theta_3) [\hat{\mathbf{B}}] = R(\theta_3) R(\theta_2) [\hat{\mathbf{A}}] = R [\hat{\mathbf{I}}] \\
 R(\theta_3)^T [\hat{\mathbf{C}}] &= [\hat{\mathbf{B}}] = R(\theta_2) [\hat{\mathbf{A}}] = R(\theta_2) R(\theta_1) [\hat{\mathbf{I}}] \\
 R(\theta_2)^T R(\theta_3)^T [\hat{\mathbf{C}}] &= R(\theta_2)^T [\hat{\mathbf{B}}] = [\hat{\mathbf{A}}] = R(\theta_1) [\hat{\mathbf{I}}] \\
 R^T [\hat{\mathbf{C}}] &= R(\theta_1)^T R(\theta_2)^T [\hat{\mathbf{B}}] = R(\theta_1)^T [\hat{\mathbf{A}}] = [\hat{\mathbf{I}}]
 \end{aligned}$$

Si le mouvement relatif entre deux bases consiste seulement d'une rotation θ_1 autour de l'axe $\hat{\mathbf{A}}_1$, la vitesse angulaire est égale à :

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}_1 \hat{\mathbf{A}}_1$$

L'approche est la même pour les autres directions.

La vitesse angulaire de la base $\{\hat{\mathbf{C}}\}$ par rapport au repère inertiel $\{\hat{\mathbf{I}}\}$ est, grâce à l'additivité des vitesses angulaires, donnée par :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta}_1 \hat{\mathbf{I}}_1 + \dot{\theta}_2 \hat{\mathbf{A}}_2 + \dot{\theta}_3 \hat{\mathbf{B}}_3 \\
 &= \dot{\theta}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 + \dot{\theta}_2 \hat{\mathbf{B}}_2 + \dot{\theta}_3 \hat{\mathbf{C}}_3
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

La matrice ω des composantes du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ s'écrit dans la base $\{\hat{\mathbf{C}}\}$ comme suit :

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\cos\theta_2 \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

On peut réécrire cette expression sous la forme :

$$\boldsymbol{\omega} = B\dot{\theta} \tag{6.11}$$

La matrice B est inversible sauf dans le cas où θ_2 vaut $\pi/2$. On peut, quand elle régulière, obtenir l'expression de $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = B^{-1}\omega \quad (6.12)$$

Lorsque l'on passe de la première séquence de rotations à la deuxième, la vitesse angulaire absolue est évidemment la même. En suivant le même raisonnement, on obtient l'expression de ω en fonction de $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$ et $\dot{\alpha}_3$, également écrite dans la base $\{\hat{\mathbf{C}}\}$:

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\alpha}_1 \hat{\mathbf{I}}_2 + \dot{\alpha}_2 \hat{\mathbf{A}}_3 + \dot{\alpha}_3 \hat{\mathbf{B}}_1 \\ &= \dot{\alpha}_1 \hat{\mathbf{A}}_2 + \dot{\alpha}_2 \hat{\mathbf{B}}_3 + \dot{\alpha}_3 \hat{\mathbf{C}}_1 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dès lors, la matrice ω des composantes du vecteur ω s'écrit dans la base $\{\hat{\mathbf{C}}\}$ comme suit pour cette séquence de rotation :

$$\omega = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_2 & 0 & 1 \\ \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

On égale les deux expressions de ω afin d'obtenir la valeur de $\dot{\alpha} = [\dot{\alpha}_1 \ \dot{\alpha}_2 \ \dot{\alpha}_3]^T$:

$$\begin{aligned} \omega &= B^1(\theta)\dot{\theta} = B^2(\alpha)\dot{\alpha} \\ \Leftrightarrow \dot{\alpha} &= (B^2)^{-1} B^1 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (6.15)$$

On obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = 0.0981 \\ \dot{\alpha}_2 = 0.2928 \\ \dot{\alpha}_3 = -0.0073 \end{cases} \quad (6.16)$$

On a donc obtenu les angles $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$ et les vitesses $\dot{\alpha} = [\dot{\alpha}_1 \ \dot{\alpha}_2 \ \dot{\alpha}_3]^T$.

La correspondance entre les valeurs finales des angles et vitesses de la première simulation et initiales de la seconde simulation est reprise ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \theta_1^F = -0.0255 \\ \theta_2^F = 1.4711 \\ \theta_3^F = 0.0965 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1^I = 1.4708 \\ \alpha_2^I = 0.1218 \\ \alpha_3^I = -0.0026 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1^F = -0.0968 \\ \dot{\theta}_2^F = 0.0995 \\ \dot{\theta}_3^F = 0.1963 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^I = 0.0981 \\ \dot{\alpha}_2^I = 0.2928 \\ \dot{\alpha}_3^I = -0.0073 \end{pmatrix}$$

On peut dès lors poursuivre la simulation du mouvement rotationnel du corps à partir de la deuxième configuration avec les valeurs déterminées pour la nouvelle succession de rotations. On a donc évité la singularité cinématique puisque l'angle intermédiaire n'a pas atteint la valeur exacte $\pi/2$.

7 Conclusion

La partie théorique de ce travail consacrée aux systèmes multicorps a exposé la modélisation de ceux-ci en fonction de leur topologie. On a notamment pu se rendre compte de l'importance du choix du partitionnement des coordonnées du système pour le bon déroulement des calculs numériques au cours d'une simulation. Le mécanisme à quatre barres a permis d'illustrer les singularités au travers d'un cas simple.

Par la suite, trois systèmes multicorps ont été étudiés : le système bielle-manivelle, le robot parallèle planaire et la plateforme de Stewart. Pour chacun des cas, on a discerné dans un premier temps leurs positions singulières. On a ensuite analysé la performance du programme sur les différents systèmes.

Durant l'étude du système bielle-manivelle, on a constaté qu'un seul repartitionnement de coordonnées était nécessaire afin d'assurer le bon déroulement de la simulation. Effectivement, la matrice J_v est mal conditionnée uniquement dans le cas où la translation du piston correspond à la coordonnée généralisée indépendante, et ce aux deux positions d'alignement de la bielle et de la manivelle. On a aperçu l'impact que pouvaient avoir les singularités cinématiques sur le comportement du système lors de la simulation, notamment au niveau des fermetures de boucle.

Les résultats furent nettement différents pour le robot parallèle planaire. En effet, ce dernier rencontre un nombre important de positions singulières au cours de son mouvement et le nombre de repartitionnements de coordonnées est dès lors considérable. On a notamment étudié l'influence du seuil de conditionnement sur le nombre de repartitionnements effectués ainsi que sur le temps d'exécution du programme.

Finalement, la plateforme de Stewart s'est révélée être moins intéressante. Effectivement, puisqu'il s'agit d'un cas en trois dimensions, la structure est dès lors moins exposée à des singularités. Cela ne veut néanmoins pas dire que le programme développé au cours de ce travail est inutile pour ce genre de systèmes étant donné qu'il assure le bon déroulement de leur simulation.

Un autre type de singularité a alors été abordé, les singularités cinématiques dans une séquence de rotations. Pour rappel, ces singularités apparaissent lorsque l'angle intermédiaire d'une séquence de rotations vaut exactement $\pi/2$. On a montré comment résoudre cette singularité, c'est-à-dire en modifiant l'ordre dans laquelle les rotations s'effectuent. Les positions et vitesses de la nouvelle séquence de rotations sont déterminées à l'aide des propriétés des matrices de rotation, ainsi qu'à partir des relations entre les bases successives.

Perspectives

Passons désormais aux perspectives que ce travail pourrait ouvrir. Premièrement, le programme implémenté dans le cadre de ce mémoire sera intégré dans les modules Robotran développés par le CEREM afin d'éviter les divers problèmes liés aux singularités.

Il serait également très intéressant de modifier le programme de telle sorte qu'il détermine, pour chaque système multicorps, son seuil de conditionnement idéal, c'est-à-dire un seuil pas trop faible afin d'éviter les factorisations inutiles et pas trop élevé afin d'assurer la convergence de la méthode de Newton-Raphson pour tout type de mouvement. Il s'agit dès lors d'un compromis entre les deux valeurs extrêmes.

Aussi, comme mentionné précédemment, ce travail n'a pas traité le cas des contraintes redondantes. On pourrait dès lors envisager de résoudre les singularités impliquées par ce type de contraintes, dans le cadre d'un autre travail.

Finalement, il serait plus judicieux d'automatiser l'application consacrée au deuxième type de singularités. Effectivement, il fallait, ici, encoder dans le deuxième fichier les valeurs des positions et accélérations déterminées à la fin du premier mouvement afin de prolonger celui-ci à partir de la deuxième séquence de rotations. Pas très ergonomique, donc ... De plus, on ne considérait ici que deux séquences de rotations. Il serait plus intéressant de pouvoir préciser les deux séquences que l'on souhaite employer.

Bibliographie

- [1] Paul FISETTE et Jean-Claude SAMIN. “Robotran : Symbolic generation of multi-body system dynamic equations”. In : *Advanced Multibody System Dynamics*. Springer, 1993, p. 373–378.
- [2] Paul FISETTE et Jean-Claude SAMIN. *Symbolic modeling of multibody systems*. T. 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] Gilbert STRANG. *Introduction to linear algebra*. T. 3. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, MA, 1993.
- [4] Doug STEWART. “A platform with six degrees of freedom”. In : *Proceedings of the institution of mechanical engineers* 180.1 (1965), p. 371–386.
- [5] Pierre-Yves WILLEMS. *Introduction à la Mécanique*. Masson, 1979.
- [6] Tony POSTIAU. “Génération et parallélisation des équations du mouvement de systemes multicorps par l’approche symbolique”. Thèse de doct. Université Catholique de Louvain, 2004.
- [7] Jens WITTENBURG. *Dynamics of systems of rigid bodies*. T. 33. Springer-Verlag, 2013.
- [8] Herbert GOLDSTEIN. *Classical mechanics*. Pearson Education India, 2011.
- [9] Jean-Pierre MERLET. *Parallel robots*. T. 128. Springer Science & Business Media, 2006.
- [10] Frank C PARK et Jin Wook KIM. “Manipulability and singularity analysis of multiple robot systems : A geometric approach”. In : *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*. T. 2. IEEE. 1998, p. 1032–1037.
- [11] Prasun CHOUDHURY et Ashitava GHOSAL. “Singularity and controllability analysis of parallel manipulators and closed-loop mechanisms”. In : *Mechanism and Machine Theory* 35.10 (2000), p. 1455–1479.

- [12] Julien HUBERT. “Manipulateurs parallèles, singularités et analyse statique”. Thèse de doct. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2010.
- [13] Werner SCHIEHLEN. “Multibody system dynamics : roots and perspectives”. In : *Multibody system dynamics* 1.2 (1997), p. 149–188.
- [14] RA WEHAGE et EJ HAUG. “Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems”. In : *Journal of mechanical design* 104.1 (1982), p. 247–255.
- [15] Latchezar GANOVSKI. “Modeling, simulation and control of redundantly actuated parallel manipulators”. Thèse de doct. Université Catholique de Louvain, 2007.

