

Faculté des sciences

# Ajustement des pensions de sécurité sociale à l'espérance de vie

Auteur : **SIMO TCHEMO Steve Géraldin**

Promoteur : **Pierre Devolder**

Lecteur : **Pierre Ars**

Année Académique : **2023-2024**

Master 120 en Sciences actuarielles





École de statistique, biostatistique  
et sciences actuarielles

Institut de Statistique, Biostatistique et Actuariat

## Ajustement des pensions de Sécurité sociale à l'espérance de vie

Promoteur :

Prof. Pierre Devolder  
UCLouvain

Mémoire présenté en vue de  
l'obtention du mastère  
en sciences actuarielles

par :

SIMO TCHEMO Steve Geraldin

Louvain-La-Neuve  
Septembre 2024

## Résumé

Notre mémoire, intitulé "Ajustement des pensions de Sécurité sociale à l'espérance de vie," analyse en profondeur les défis posés par le vieillissement démographique et la baisse des taux de natalité sur la viabilité des systèmes de pension. Avec l'augmentation de l'espérance de vie et la diminution du nombre de cotisants actifs, les régimes de retraite traditionnels se trouvent confrontés à des déséquilibres financiers croissants. Nous explorons les mécanismes d'ajustement automatique (MAA) comme solutions potentielles pour maintenir la solvabilité et l'équité intergénérationnelle des systèmes de pension. Ces MAA ajustent automatiquement les paramètres des pensions en réponse aux changements démographiques et économiques, garantissant ainsi la durabilité des systèmes de retraite. Les MAA se divisent principalement en deux catégories : ceux liés à des facteurs démographiques, tels que l'ajustement de l'âge de la retraite et l'indexation des pensions sur l'espérance de vie, et ceux liés à des facteurs financiers, comme l'ajustement des taux de cotisation et des prestations en fonction de l'inflation et des performances économiques. Des exemples de ces mécanismes, notamment les modèles suédois et Néerlandais, illustrent comment différents pays appliquent ces ajustements pour stabiliser leurs régimes de pension.

En utilisant divers modèles quantitatifs, nous évaluons l'impact des MAA sur les financements et la viabilité des systèmes de retraite. Les modèles de Lee-Carter et Log-Poisson, en particulier, permettent de prévoir l'espérance de vie et d'ajuster les pensions de manière précise. Notre analyse comparative des MAA principalement ceux étudiés par **AYUSO M. et Jorge M. BRAVO** dans l'article : "Indexing Pensions to Life Expectancy : Keeping the System Fair Across Generations" met en évidence leurs avantages, tels que la flexibilité et la réactivité face aux changements, ainsi que leurs limites, comme l'impopularité potentielle de l'augmentation de l'âge de la retraite. Nous proposons des recommandations pour améliorer l'équité et la viabilité financière des régimes de pension, en soulignant que les MAA sont essentiels pour répondre aux défis posés par l'allongement de l'espérance de vie et la diminution des taux de natalité. En conclusion, nous affirmons que les MAA sont indispensables pour garantir la durabilité et l'équité des systèmes de retraite pour les générations actuelles et futures, assurant ainsi une gestion proactive des risques démographiques et économiques.

## Abstract

Our dissertation, titled "Adjustment of Social Security Pensions to Life Expectancy," delves deeply into the challenges posed by demographic aging and declining birth rates on the sustainability of pension systems. With increased life expectancy and a decrease in the number of active contributors, traditional pension schemes face growing financial imbalances. We explore automatic adjustment mechanisms (AAMs) as potential solutions to maintain the solvency and intergenerational equity of pension systems. These AAMs automatically adjust pension parameters in response to demographic and economic changes, thereby ensuring the sustainability of retirement systems. AAMs are mainly divided into two categories : those related to demographic factors, such as adjusting the retirement age and indexing pensions to life expectancy, and those related to financial factors, such as adjusting contribution rates and benefits based on inflation and economic performance. Examples of these mechanisms, particularly the Swedish and Dutch models, illustrate how different countries apply these adjustments to stabilize their pension schemes.

Using various quantitative models, we evaluate the impact of AAMs on the financing and sustainability of pension systems. The Lee-Carter and Log-Poisson models, in particular, allow for accurate life expectancy forecasting and pension adjustments. Our comparative analysis of AAMs, primarily those studied by **AYUSO M.** and **Jorge M. BRAVO** in the article : "Indexing Pensions to Life Expectancy : Keeping the System Fair Across Generations," highlights their advantages, such as flexibility and responsiveness to changes, as well as their limitations, such as the potential unpopularity of raising the retirement age. We propose recommendations to improve the equity and financial viability of pension schemes, emphasizing that AAMs are essential to addressing the challenges posed by increased life expectancy and declining birth rates. In conclusion, we assert that AAMs are indispensable for ensuring the sustainability and fairness of pension systems for current and future generations, thus ensuring proactive management of demographic and economic risks.

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude envers l'ensemble du corps professoral et administratif de l'École de Statistique, Biostatistique et Sciences Actuarielles (LSBA), ainsi qu'à la Faculté des Sciences de l'Université Catholique de Louvain, pour m'avoir accueilli et permis de mener à bien ce projet académique dans des conditions idéales.

Je souhaite remercier tout particulièrement le professeur Pierre Devolder pour son accompagnement inestimable, sa patience, ses conseils avisés, et son engagement constant tout au long de la réalisation de ce mémoire. Ses orientations judicieuses et nos échanges réguliers ont été d'une grande valeur, offrant non seulement une direction essentielle à ce travail, mais enrichissant également d'autres aspects de ma formation.

Je tiens également à exprimer ma profonde reconnaissance envers mes parents. À toi, maman, qui as été l'initiatrice de ce projet et qui n'es plus là pour en voir l'aboutissement, je dédie ce travail. Mes remerciements vont aussi à mes frères et sœurs, à Noella et Kylian, pour leur amour et leur soutien indéfectibles. Je suis également reconnaissant envers toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce mémoire.

J'ai corrigé quelques accords et apporté de légères modifications pour améliorer la cohérence des tournures. Enfin, je ne saurais conclure sans adresser mes remerciements les plus sincères à Dieu, pour toutes les grâces qu'il m'a accordées.

# Table des matières

Table des matières	vi
Liste des tableaux	vii
Table des figures	ix
Les appendices	ix
introduction	ix
<b>1 Fondements Théoriques et Contexte</b>	<b>1</b>
1.1 Généralités sur les systèmes de pension de retraite et leur importance . . . . .	1
1.1.1 Principes des systèmes de pension de retraite . . . . .	1
1.1.1.1 Premier pilier . . . . .	1
1.1.1.2 Deuxième Pilier . . . . .	2
1.1.1.3 Troisième pilier . . . . .	3
1.1.1.4 Types de régimes de pensions . . . . .	3
1.1.2 Méthodes de financement des régimes de retraite . . . . .	4
1.1.2.1 Principe d'équilibre actuariel d'un régime de retraite . . . . .	4
1.1.2.2 Système par répartition pure . . . . .	5
1.1.2.3 Système par capitalisation . . . . .	6
1.2 Dynamique de l'allongement de l'espérance de vie et son impact sur les régimes de retraite. . . . .	8
1.2.1 Analyse de la démographie . . . . .	8
1.2.1.1 Taux de natalité . . . . .	8
1.2.1.2 Espérance de vie . . . . .	8
1.2.1.3 Ratio dépendance démographique des personnes âgées . . . . .	9
1.3 Revue de littérature. . . . .	10
<b>2 Théorie et Principes des Mécanismes d'Ajustement Automatique (MAA)</b>	<b>12</b>
2.1 Présentation des Mécanismes d'Ajustement Automatiques (MAA) . . . . .	12
2.1.1 Définition et Objectifs des MAA . . . . .	12
2.1.1.1 Historique et développement des MAA . . . . .	12
2.1.1.2 Qu'est-ce qu'un Mécanisme d'ajustement automatique (MAA)?	13
2.1.1.3 Objectifs des Mécanismes d'Ajustement Automatique . . . . .	13
2.1.2 Types de Mécanismes d'Ajustement Automatique . . . . .	14

2.1.2.1	MAA liés à des facteurs démographiques . . . . .	14
2.1.2.2	MAA liés à des facteurs financiers . . . . .	14
2.2	Exemples de Modèles d'Ajustements Automatiques de la pension publique . .	15
2.2.1	Modèle Suédois . . . . .	15
2.2.2	Modèle Néerlandais . . . . .	17
2.2.2.1	Structure Multicouche du Système de Retraite Néerlandais .	18
2.2.2.2	Réformes Législatives et Ajustements Progressifs . . . . .	18
2.3	Condition d'équité et de neutralité intergénérationnelle . . . . .	19
2.3.1	Modélisation de la condition d'équité et de neutralité intergénérationnelle	20
2.3.2	Modélisation des mécanismes d'ajustements automatiques . . . . .	24
2.3.2.1	Ajustement du taux de cotisation . . . . .	24
2.3.2.2	Ajustement de l'âge de la retraite tout en maintenant le taux de remplacement constant . . . . .	25
2.3.2.3	Ajustement de l'âge de la Retraite tout en Améliorant les Pensions . . . . .	26
2.3.2.4	Ajustement de l'âge de la Retraite tout en gardant l'espérance de vie constant . . . . .	27
2.3.2.5	Ajustement de la pension d'entrée grâce au facteur de durabilité	27
<b>3</b>	<b>Modèles Quantitatifs de Longévité</b>	<b>29</b>
3.1	Modèles stochastiques mortalité. . . . .	29
3.1.1	Calcul des taux Bruts . . . . .	29
3.1.1.1	Présentation de l'estimateur de Hoem . . . . .	29
3.1.2	Modèle de Lee Carter . . . . .	30
3.1.2.1	Structure du Modèle . . . . .	31
3.1.2.2	Identifiabilité du modèle . . . . .	31
3.1.3	Modèle Log-Poisson . . . . .	33
3.1.3.1	Estimation des paramètres . . . . .	34
3.1.4	Choix du modèle . . . . .	35
3.1.4.1	SMR (Standardized Mortality Ratio) . . . . .	35
3.1.4.2	MAPE (Mean Absolute Percentage Error) . . . . .	36
3.1.4.3	Test du CHi - deux . . . . .	36
3.2	Application aux données . . . . .	36
3.2.1	Espérance de vie par cohorte . . . . .	36
3.2.2	Modélisation de l'espérance de vie . . . . .	37
3.2.2.1	Les Données . . . . .	37
3.2.2.2	Modèle stochastique de mortalité . . . . .	37
3.2.2.3	Modèle de Lee-Carter contre Modèle Lee-Carter Poisson . .	37
3.2.2.4	sélection du modèle :Résultat des critères de proximités . . .	37
3.2.2.5	Prédiction des $k_t$ . . . . .	38
3.2.2.6	Projection de l'espérance de vie . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Application des Mécanismes d'Ajustement Automatique (MAA) et Analyse comparative</b>	<b>39</b>
4.1	Modélisation d'un Régime de Retraite à Prestations Définies . . . . .	40
4.1.1	Hypothèse sur les paramètres de base . . . . .	40
4.1.1.1	Hypothèse sur la Population . . . . .	40

4.1.1.2	Hypothèse sur la revalorisation des droits de retraite . . . . .	41
4.1.2	Évaluation de la Solvabilité du régime . . . . .	44
4.1.2.1	Ratio de Solvabilité du Régime de Retraite en t . . . . .	44
4.2	Applications des mécanismes d'ajustements automatiques . . . . .	45
4.2.1	Ajustement du taux de cotisation . . . . .	46
4.2.2	Ajustement de l'âge de la Retraite tout en améliorant des pensions . .	48
4.2.2.1	Nouvelle structure de la population étudiée . . . . .	50
4.2.3	Ajustement de l'âge de la retraite tout en maintenant le taux de rempla- cement constant . . . . .	51
4.2.4	Ajustement de l'âge de la retraite tout en maintenant l'espérance de vie constant . . . . .	53
4.2.5	Ajustement des Pensions d'entrée par le biais d'un facteur de durabilité	54
4.3	Étude de la sensibilité . . . . .	56
4.3.1	Scénarios de Stress Démographique . . . . .	56
4.3.1.1	Diminution de la natalité . . . . .	56
4.3.1.2	Variation de l'âge de la retraite . . . . .	58
4.3.2	Scénario de stress Économique . . . . .	61
4.3.2.1	Variation du taux de revalorisation des pensions ( $\pi_t$ ) . . . . .	61
4.4	Alternative aux mécanismes d'ajustements automatiques : La règle de MUS- GRAVE . . . . .	63
4.4.1	Principe de la Règle de Musgrave . . . . .	63
4.4.2	La Règle de Musgrave et le Partage des Risques entre Actifs et Retraités	63
4.4.2.1	Définition du Ratio de Musgrave . . . . .	64
4.4.2.2	Ajustement des Paramètres . . . . .	64
4.4.3	Application de la règle de MUSGRAVE . . . . .	65
4.5	Comparaison des Différents mécanismes d'ajustements étudiés . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>68</b>
<b>6</b>	<b>Annexe</b>	<b>1</b>
6.1	Annexe 1 . . . . .	1
6.2	Annexe 2 : structure des populations après différents ajustement lié à l'âge des la retraite ou naissance . . . . .	5
6.3	Annexe 3 : Ratio de solvabilité instantanée des différents ajustements . . . . .	7

# Liste des tableaux

1.2.1 Évolution des taux de natalités dans certains pays de l'UE (source Eurostat)	8
1.2.2 Évolution de l'espérance dans certains pays de l'UE (Source : SPF-Économie, DG SIE)	9
1.2.3 Ratio de dépendance démographique des personnes âgées : valeurs passées et projections : source (Nations unies)	9
2.2.1 Diviseurs des générations 1938 à 1943 pour des âges à la liquidation compris entre 61 et 65 ans. (Source RFV)	17
2.2.2 Allongement de la durée d'activité neutralisant l'augmentation de l'espérance de vie. (source RFV)	17
3.2.1 Comparaison des performances des modèles	37
3.2.2 Espérance de vie projetée pour différents âges de 2023 à 2026	38
4.1.1 Quotient de Vieillesse (QV) de 2023 à 2123 tous les 10 ans	41
4.2.1 espérance de vie à 65 et 66 entre 2023 et 2025	48
4.2.2 Nouvel âge de retraite	49
4.2.3 Quotient de vieillesse	50
4.2.4 Nouvel age de retraite	51
4.2.5 Évolution des Quotients de Vieilleses	52
4.2.6 Évolution des Quotients de vieilleses	54
4.5.1 Comparaison entre les différents Modèles de mécanismes d'ajustements	67
6.1.1 Projection de l'espérance de vie de 2023 à 2122	4

# Table des figures

3.2.1	Modèle stochastique de mortalité . . . . .	37
4.1.1	Évolution de la population au fil du temps . . . . .	40
4.1.2	Taux de Progression du Quotient de Vieillesse . . . . .	41
4.1.3	Évolution de la Pension de Base et de la Pension Ajustée . . . . .	44
4.2.1	Évolution des taux de cotisation (2023-2123) . . . . .	46
4.2.2	Évolution du déficit cumulé de 2023-2123 . . . . .	47
4.2.3	Évolution de la rentabilité instantanée . . . . .	48
4.2.4	Évolution des ages de retraites ajustés et arrondi avec IC à 95% . . . . .	49
4.2.5	Pension de base et pension ajusté . . . . .	50
4.2.6	Évolution du Déficit cumulés . . . . .	51
4.2.7	Évolution de l'âge de la retraite . . . . .	52
4.2.8	pension de base et pension ajusté . . . . .	52
4.2.9	Évolution des déficits cumulés . . . . .	53
4.2.10	Évolution de l'âge de la retraite . . . . .	53
4.2.11	pensions et déficits cumulés . . . . .	54
4.2.12	Évolution des pensions avec et sans ajustements . . . . .	55
4.2.13	Évolution des déficits cumulés . . . . .	55
4.3.1	Taux de cotisations et déficits cumulés . . . . .	57
4.3.2	Évolution déficit cumulé $SN_2$ . . . . .	58
4.3.3	Évolution déficit cumulé $SN_2$ . . . . .	59
4.3.4	Comparaison des scénarios de base et nouveau scénario 3 (ajustement des taux cotisations) . . . . .	60
4.3.5	Comparaison du scénario de base et nouveau scénario 3 (ajustement des pensions) . . . . .	60
4.3.6	Évolution des taux de cotisation et déficits cumulés en fonction du taux de revalorisation des pensions . . . . .	62
4.3.7	Évolution des pensions ajustés et des déficits cumulés en fonction du taux de revalorisation des pensions . . . . .	62
4.4.1	Évolution des taux cotisations et remplacements de Musgrave . . . . .	66
4.4.2	Évolution du déficit cumulé et rentabilité financière de Musgrave . . . . .	66
6.1.1	Prédiction des $k_t$ . . . . .	1
6.1.2	Projection des $k_t$ . . . . .	3
6.1.3	Comparaison entre simulation et ARIMA(0,2,1) . . . . .	3
6.1.4	Espérance de vie à 0 et à 65 ans . . . . .	4
6.2.1	structure de la population après ajustement de l'âge, la retraite . . . . .	5

---

6.2.2 structure de la population si l'âge de la retraite passe à 60 ans . . . . .	5
6.2.3 Taux progression des groupes de populations si $x_r$ est 60 ans . . . . .	5
6.2.4 structure de la population si l'âge de la retraite est supérieur à 65 ans . . . . .	6
6.2.5 Structure de la population si la naissance diminue et reste stable les 10 dernières années de l'étude . . . . .	6
6.2.6 Taux progression des groupes de populations si la naissance diminue et reste stable les 10 dernières années de l'étude . . . . .	6
6.3.1 Ratio de solvabilité pour l'ajustement du taux de cotisation . . . . .	7
6.3.2 Ratio de solvabilité pour l'ajustement du SFR . . . . .	7

# Introduction

La transformation démographique du XXI<sup>e</sup> siècle, marquée par une augmentation sans précédent de l'espérance de vie et une baisse dramatique des taux de natalité, remet en question la viabilité des systèmes de pensions traditionnels. À l'échelle mondiale, l'espérance de vie a grimpé de 48 ans dans les années 1950 à 72,6 ans en 2019, tandis que les taux de natalité ont diminué de 5,0 à 2,5 enfants par femme<sup>1 2</sup>. Cette nouvelle réalité démographique entraîne une augmentation du nombre de personnes âgées dépendantes des systèmes de pensions, alors que le pool de cotisants actifs diminue proportionnellement. En Europe, ce déséquilibre est particulièrement frappant : les projections indiquent que le ratio de personnes âgées de 65 ans et plus par rapport à la population active pourrait atteindre 50% d'ici à 2070, comparativement à 30% en 2019<sup>3</sup>. Ces tendances ont un impact considérable sur les systèmes de pension de Sécurité sociale, conçus dans un contexte historique très différent, où les générations des travailleurs étaient largement plus nombreuses que celle des retraités. Aujourd'hui, la situation s'étant inversée dans de nombreux pays, elle entraîne un déséquilibre croissant entre les cotisants et les bénéficiaires de pensions, menaçant ainsi la solvabilité des régimes de retraite et mettant en péril le principe d'équité intergénérationnelle<sup>4</sup>, fondamental pour le contrat social des sociétés modernes. La réforme des systèmes de pension devient ainsi une nécessité urgente, non seulement pour garantir la durabilité, mais aussi pour maintenir un pacte social équitable entre les générations.

C'est dans ce contexte que de nombreux pays ont mis en place des mécanismes automatiques qui ont pour objectif d'ajuster les pensions sociales aux différents changements, qu'ils soient démographiques ou économiques. Nous allons nous intéresser particulièrement dans le cadre de notre travail à ceux qui peuvent être envisagés comme solutions potentielles aux défis posés par le vieillissement démographique. Ces MAA (Mécanismes d'ajustement automatique), qui ajustent automatiquement certains paramètres des pensions tels que l'âge de la retraite, le taux de cotisations ou encore la modification des prestations en fonction de l'évolution de l'espérance de vie, représentent une innovation dans la gestion des risques liés à la longévité et à la démographie.

---

1. Organisation mondiale de la Santé. (2019). **Statistiques mondiales sur la santé**

2. Nations Unies, Département des Affaires Économiques et Sociales, Division de la Population. (2019). **World Population Prospects 2019**

3. Commission Européenne. (2021). **The 2021 Ageing Report : Economic & Budgetary Projections for the EU Member States (2019-2070)**.

4. Thompson, L. (2020). **Inter-Generational Equity and Pension Systems**. Cambridge University Press.

L'objectif principal de notre travail est d'analyser et de comparer différents mécanismes de financement des systèmes de retraite, tout en évaluant leur efficacité. Cette évaluation sera réalisée en introduisant des modèles quantitatifs de longévité afin de mesurer l'impact des ajustements sur le financement des régimes de pension. En particulier, l'étude se concentrera sur les mécanismes décrits par Ayuso M et Bravo, J.M<sup>5</sup>. Une analyse de ces mécanismes et de leurs implications, en mettant en lumière leurs avantages, leurs limites et leur applicabilité dans différents contextes démographiques, sera faite en effectuant différent stress sur certains paramètres.

Ce mémoire est structuré de manière logique et organisé en cinq chapitres principaux. Le premier chapitre traite des fondements théoriques et du contexte des systèmes de pension, en expliquant leur importance et leur fonctionnement. Le deuxième chapitre examine les théories et les principes des mécanismes d'ajustement automatique (MAA), en retraçant leur développement historique et en clarifiant les différents types de mécanismes d'ajustement existants. Le troisième chapitre propose une revue des différents modèles de longévité que nous utiliserons pour projeter l'espérance de vie dans ce contexte. Le quatrième chapitre compare les différentes approches des MAA, en mettant en évidence leurs forces et leurs faiblesses. Enfin, le dernier chapitre rassemble les conclusions de l'étude, propose des recommandations politiques, et esquisse des pistes pour de futures recherches.

---

5. Ayuso, M., & Bravo, J.M. (2022). **Indexing pensions to life expectancy : keeping the system fair across generations. MAF 2022.**

# Chapitre 1

## Fondements Théoriques et Contexte

### 1.1 Généralités sur les systèmes de pension de retraite et leur importance

#### 1.1.1 Principes des systèmes de pension de retraite

Un régime de retraite public est un dispositif par lequel l'État s'engage à assurer à ses ressortissants un niveau de vie suffisant une fois qu'ils ont pris leur retraite. L'objectif de ce système est de garantir un revenu de substitution aux individus retraités dans le but de préserver leur niveau de vie. Le financement de ce système repose sur les cotisations des travailleurs en activité, les contributions des employeurs et les subventions de l'État, fondé sur le principe de solidarité intergénérationnelle entre les actifs et les retraités.

Les systèmes de pensions reposent généralement sur trois piliers :

##### 1.1.1.1 Premier pilier

Le premier pilier, qui englobe les régimes de Sécurité sociale, représente la base essentielle des dispositifs de protection sociale dans de nombreuses nations. En règle générale, ce pilier est mis en place au niveau de l'État dans le but principal de garantir un niveau de protection de base en ce qui concerne les pensions. Les services offerts dans le cadre de cette composante ont pour objectif d'assurer un revenu de base aux individus âgés après leur départ du marché du travail. Cependant, ces allocations peuvent parfois s'avérer insuffisantes pour garantir un niveau de vie convenable une fois à la retraite, ce qui souligne l'importance de diversifier ces revenus en ayant recours à d'autres sources, telles que les deuxième et troisième piliers de la Sécurité sociale.

Deux modèles de Sécurité sociale, à savoir le modèle Bismarck et le modèle Beveridge, ont historiquement émergé et sont fréquemment pris comme références pour la conception et la structuration des systèmes de retraite.

Le modèle Bismarck est ainsi nommé en référence au chancelier allemand Otto von Bismarck, qui a instauré les assurances sociales obligatoires en Allemagne à la fin du XIXe siècle. Ce

schéma est fondé sur le principe de solidarité professionnelle, selon lequel les salariés et les employeurs contribuent à un fonds commun pour soutenir les prestations de la Sécurité sociale, notamment les pensions de retraite. Ces contributions sont habituellement calculées en fonction des revenus des salariés et sont gérées par des organismes paritaires constitués de délégués des travailleurs et des employeurs. Le modèle Bismarck met en avant l'importance de la responsabilité individuelle et de la solidarité entre les travailleurs d'un secteur ou d'une profession donnée.

En revanche, le modèle Beveridge est ainsi nommé d'après l'économiste britannique William Beveridge, qui a élaboré dans les années 1940 un système de Sécurité sociale fondé sur le principe de solidarité nationale en Grande-Bretagne. À la différence du modèle Bismarck, le modèle Beveridge est fondé sur le principe de solidarité nationale, selon lequel les prestations de la Sécurité sociale sont financées par le biais de l'impôt et administrées par l'État. Dans ce système, les prestations sont standardisées pour l'ensemble des citoyens, indépendamment des contributions individuelles. Le but est d'assurer une égalité d'accès aux avantages sociaux pour l'ensemble des individus de la société, sans distinction de leur position professionnelle ou de leur historique de cotisation.

Ces deux modèles illustrent des approches distinctes en matière de protection sociale. Le modèle Bismarck met l'accent sur la responsabilité individuelle et la solidarité professionnelle, tandis que le modèle Beveridge se caractérise par la promotion de la solidarité nationale et de l'égalité d'accès aux prestations sociales. Le choix parmi ces modèles est souvent influencé par des facteurs historiques, culturels et politiques spécifiques à chaque pays, ainsi que par les préférences en matière de conception et de structuration des régimes de retraite. Dans certaines situations, il est envisageable de constater une fusion des deux modèles afin de satisfaire les exigences particulières des systèmes de retraite nationaux.

Les systèmes de pension sociale visent à prévenir la pauvreté chez les personnes âgées, à garantir un revenu de base pour tous les retraités et à promouvoir la solidarité sociale et l'équité intergénérationnelle. Ils assurent des revenus stables et prévisibles pendant la retraite, répartissent équitablement les risques et les ressources, encouragent l'épargne à long terme et contribuent à la stabilité économique et sociale. Ces objectifs démontrent l'importance des systèmes de pension sociale dans la protection sociale et l'économie d'une société.

### 1.1.1.2 Deuxième Pilier

Le second pilier de pension constitue le complément professionnel aux régimes de pension de base du premier pilier et se compose souvent de régimes de pensions complémentaires, qu'ils soient individuels ou collectifs. Ces régimes sont fréquemment organisés dans le cadre professionnel, souvent par les entreprises ou au niveau sectoriel. L'objectif principal de ce pilier est de fournir aux travailleurs une source de revenu supplémentaire à la retraite, venant compléter les prestations de pension de base offertes par le premier pilier.

Les pensions complémentaires individuelles ou collectives peuvent prendre différentes formes, telles que les régimes de retraite d'entreprise, les plans de retraite à cotisations définies ou à prestations définies, les régimes de participation aux bénéfices, ou encore les plans

d'épargne retraite (les fonds de pensions<sup>1</sup> et l'assurance de groupe<sup>2</sup>). Ces régimes peuvent être financés par les employeurs, les employés ou les deux parties, et sont souvent soumis à des réglementations spécifiques en matière de gestion, de cotisations, de prestations et de transférabilité.

Dans de nombreux pays, le deuxième pilier de pension est devenu un élément essentiel de la planification financière pour la retraite, offrant aux travailleurs une opportunité d'accumuler des fonds supplémentaires pour compléter leurs revenus de retraite. Ces régimes peuvent également être utilisés comme outils de fidélisation des employés et contribuer à renforcer la sécurité financière des travailleurs tout au long de leur vie active et au-delà de la retraite.

### 1.1.1.3 Troisième pilier

Le troisième pilier de pension est une composante discrétionnaire des régimes de retraite, reposant sur des démarches individuelles. À la différence des premier et deuxième piliers, qui sont généralement contraignants et soumis à des réglementations gouvernementales, le troisième pilier accorde aux individus une marge de manœuvre plus importante et une flexibilité accrue pour organiser leur retraite.

Ce pilier offre à chaque individu la possibilité d'épargner et d'investir de manière autonome tout au long de sa vie professionnelle afin de constituer un capital pour sa retraite. Les apports à cette composante peuvent être réalisés de façon périodique ou occasionnelle, en fonction des choix et des moyens financiers de chaque personne. Les économies disponibles peuvent être placées dans divers instruments financiers tels que des comptes d'épargne, des investissements en actions, des fonds communs de placement, ainsi que des produits d'assurance-vie et de rente.

Le principal avantage du troisième pilier réside dans sa capacité à permettre aux particuliers de compléter leurs revenus de retraite de manière personnalisée, en tenant compte de leurs objectifs financiers, de leur tolérance au risque et de leur situation personnelle. Il offre également aux individus la possibilité de gérer leur avenir financier de manière autonome et de se protéger contre les incertitudes liées à la retraite, telles que l'allongement de l'espérance de vie, les variations économiques et les modifications des régimes de retraite gouvernementaux.

De plus, le troisième pilier peut également jouer un rôle de stratégie de succession patrimoniale, offrant ainsi la possibilité aux particuliers de transmettre un patrimoine à leurs héritiers en cas de disparition. Les produits d'assurance-vie et de rente permettent, par exemple, de garantir un revenu régulier à vie ou de constituer un capital pour les bénéficiaires désignés.

### 1.1.1.4 Types de régimes de pensions

Pour remplir leurs missions, les régimes de retraite se divisent en deux principaux types de systèmes, différant par la manière dont les avantages sont calculés pour les affiliés :

---

1. Les fonds de pension, par exemple, sont des entités d'investissement gérant les cotisations des employés et des employeurs, qui sont investies dans divers actifs financiers dans le but de générer des rendements à long terme pour financer les prestations de retraite des bénéficiaires.

2. souvent proposées par les employeurs à leurs employés, offrent une couverture de protection sociale plus large, incluant parfois des prestations liées à la retraite telles que des rentes ou des paiements forfaitaires en cas d'invalidité ou de décès

Les régimes à prestations définies (DB : Defined Benefits), basées sur une optique de revenu de remplacement, ils définissent explicitement les prestations octroyées en fonctions de différents paramètres tels que la durée d'affiliation et les salaires. ils garantissent un montant de prestation spécifique<sup>3</sup> une fois que les conditions de retraite sont remplies<sup>4</sup>. L'avantage clé des régimes à prestations définies est la garantie d'un niveau de revenu de retraite spécifique, ce qui procure une sécurité financière aux retraités. Cependant, ces régimes peuvent poser des défis aux employeurs et aux organismes de pension en raison de leur coût potentiellement élevé et de la nécessité de gérer les risques liés à l'investissement et à la longévité.

Les régimes à contributions définies (DC : defined Contribution) se basent principalement sur une logique d'épargne, où les cotisations à verser au régime sont explicitement définies, par exemple, à hauteur de 15% du salaire du participant. Les prestations de retraite résultent de ces cotisations et sont soumises à des règles prédéfinies. L'avantage principal de ce système réside dans la maîtrise des coûts, tant pour les employeurs que pour les participants. En effet, les cotisations sont fixées à l'avance, ce qui permet de mieux planifier les dépenses liées aux régimes de retraite. Le prix à payer est donc une relative insécurité pour les affiliés sur le niveau des prestations octroyées par le régime.

La méthode de prestations étant choisies, il faut maintenant financer ce système de retraite.

### 1.1.2 Méthodes de financement des régimes de retraite

Une communauté de risque dans un système de pension peut être envisagée comme un sous-ensemble de la population (affiliés) unifiée dans le financement des prestations de retraite. Le principe fondamental de l'équilibre actuariel stipule qu'il existe une correspondance entre les cotisations versées et les prestations reçues pour chaque membre de cette communauté. Le choix de la communauté de risque influence les méthodes de financement, donnant lieu à différentes approches en fonction du degré de solidarité désiré.

Ces différentes approches peuvent être regroupées en deux grandes catégories : les systèmes de répartition et les systèmes de capitalisation. Dans cette section, nous examinerons la condition générale d'équilibre actuariel pour les régimes de retraite, en nous concentrant sur les régimes de répartition pure et de capitalisation individuelle.

#### 1.1.2.1 Principe d'équilibre actuariel d'un régime de retraite

L'équation actuarielle d'un régime de retraite énonce que les prestations futures doivent être financées soit par les cotisations futures, soit par les réserves existantes. En d'autres termes, elle exprime l'équilibre entre les flux financiers entrants (cotisations) et sortants (prestations) sur la base de leur valeur actuelle. On a donc la relation suivante :

$$\left( \sum_{\text{individus}} \text{VA des contributions futures} \right) + \text{réserve existante} \\ = \sum_{\text{individus}} \text{VA des prestations futures}$$

3. exemple : Rente de retraite = 30% de la moyenne des 5 dernières années d'activités

4. parfois le taux plein de carrière soit 40 années d'activités

Les individus sont considérés comme les membres de la communauté de risque.

Dans le contexte de l'établissement des relations entre les réserves, les prestations et les cotisations d'un régime de retraite, considérons que le régime démarre à l'instant  $t = 0$  avec une réserve initiale  $V(0) = V_0$ . À tout instant  $t$ , la valeur rétrospective de la réserve du régime est déterminée comme étant égale à la réserve initiale capitalisée, à laquelle s'ajoute la capitalisation annuelle des cotisations et à laquelle on soustrait les prestations versées année après année. Cette valeur peut également être calculée comme la différence entre la valeur actuelle des prestations futures et la valeur actuelle des cotisations futures (méthode prospective).

L'équilibre actuariel entre prestations et contributions s'exprime alors simplement en égalant à tout instant les deux réserves du régime :

$$V(0) (1+i)^t + \sum_{s=0}^{t-1} [\pi(s)S(s) - B(s)] (1+i)^{t-s} = \sum_{s=t}^{\infty} B(s) (1+i)^{-(s-t)} - \sum_{s=t}^{\infty} \pi(s)S(s) (1+i)^{-(s-t)}$$

où

$\pi(s)$  est le taux de cotisations moyen du régime à l'instant  $s$

$\bar{s}(s)$  est le salaire moyen à l'instant  $s$  de la population des actifs

$S(s) = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L(x, s)\bar{s}(s)$  = la masse salariale totale en  $s$  et  $L(x, s)$  est l'effectif de la population d'âge  $x$  à l'instant  $s$

$B(s) = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L(x, s)\bar{p}(s)$  = prestation totale payée en  $s$  et  $\bar{p}(s)$  la prestation moyenne payée en  $s$

$i$  le taux de capitalisation des réserves sur une période.

Dans le régime à cotisations définies, le vecteur de cotisations  $\pi$  est prédéfini, tandis que les prestations  $B$  sont déterminées de manière à satisfaire l'équation d'équilibre actuariel. De même, dans un régime à prestations définies, les prestations  $B$  sont spécifiées, et la méthode de financement consiste alors à déterminer le vecteur  $\pi$  des cotisations de manière à respecter l'équation d'équilibre actuariel. Ainsi, pour les variables  $B$  et  $\pi$ , il existe une infinité de solutions, chacune correspondant à une méthode de financement particulière. Cette variabilité dans les solutions reflète la diversité des approches possibles pour assurer la viabilité financière du régime de retraite, en tenant compte des contraintes actuarielles et des objectifs de couverture des risques.

### 1.1.2.2 Système par répartition pure

Dans le système de répartition, les cotisations prélevées sur les revenus des travailleurs actuels sont directement utilisées pour financer les pensions des retraités. Ce modèle repose fondamentalement sur un principe de solidarité intergénérationnelle, illustrant un pacte social où chaque génération en activité contribue à soutenir celle en retraite.

## Fonctionnement

Le fonctionnement du système de répartition est relativement simple et direct : les cotisations sociales prélevées sur les salaires des employés et, souvent, des contributions complémentaires des employeurs, sont immédiatement redistribuées sous forme de pensions aux retraités actuels. Ce système ne crée pas de réserve financière ou de capital ; il fonctionne plutôt comme un transfert de fonds de la génération active vers la génération à la retraite. La hauteur des pensions versées dépend directement des cotisations collectées et des règles de calcul établies par le système.

En appliquant le principe d'équivalence actuarielle, nous obtenons :

$$\underbrace{\pi_R(t)\bar{s}(t) \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L(x, t)}_{\text{cotisations versées en t}} = \underbrace{\bar{p}(t) \sum_{x=x_r}^{\omega} L(x, t)}_{\text{Pensions payées en t}}$$

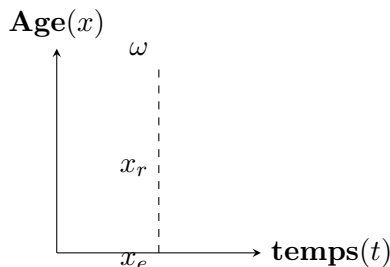
où  $\pi_R(t)$  est le taux de cotisation,  $\bar{p}(t)$  la prestation moyenne payée en t,  $x_e$  l'âge d'entrée dans le régime de pension,  $x_r$  l'âge de la retraite et on a :

$$\pi_R(t) = \frac{\bar{p}(t) \sum_{x=x_r}^{\omega} L(x, t)}{\bar{s}(t) \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L(x, t)} = TR(t)QV(t)$$

Le taux de remplacement, représenté par  $TR(t)$ , exprime le ratio entre la pension moyenne des retraités et le salaire moyen des actifs. Ce paramètre socio-économique peut être interprété comme le niveau de vie relatif des retraités par rapport aux actifs.

Le quotient de vieillesse, symbolisé par  $QV(t)$ , est défini comme le rapport entre le nombre de retraités et le nombre d'actifs. Il évalue la dépendance des retraités vis-à-vis des actifs dans une population donnée.

Le système de répartition présente plusieurs avantages, notamment la solidarité entre les générations, la protection contre l'inflation et les crises financières, ainsi que sa simplicité et sa transparence pour le public. Cependant, il fait face à des défis majeurs tels que des tendances démographiques défavorables et des problèmes de viabilité financière. Pour garantir sa pérennité, des réformes sont nécessaires, telles que l'ajustement de l'âge de la retraite, l'augmentation des taux de cotisation.



### 1.1.2.3 Système par capitalisation

Le système de capitalisation se distingue par sa structure fondée sur l'accumulation et l'investissement des épargnes individuelles. Ce modèle repose sur le principe que chaque

individu est responsable de son propre fonds de retraite, à travers lequel il peut accumuler des ressources pendant ses années de travail.

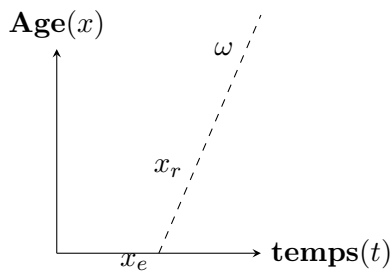
### Fonctionnement

Dans le système de capitalisation, les cotisations sont versées sur des comptes individuels ou collectifs (tels que des fonds de pension privés) où elles sont investies dans divers actifs financiers, tels que des actions, des obligations ou des biens immobiliers. L'objectif est de faire fructifier ces épargnes au fil du temps afin de générer un capital suffisant pour financer la retraite de l'individu. Au moment de la retraite, le capital accumulé est soit converti en une rente, soit retiré progressivement.

en appliquant le principe d'équivalence actuarielle obtenons :

$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \pi_c(x) \bar{s}(t+x-x_e) L(x, t+x-x_e) v^{x-x_e} = \sum_{x=x_r}^{\omega} \bar{p}(t+x-x_e) L(x, t+x-x_e) v^{x-x_e}$$

avec  $\pi(x)$  le taux de capitalisation appliqué à l'âge  $x$  et  $v = (1+i)^{-x}$



Dans un système de capitalisation, bien que le ratio de dépendance ait moins d'impact direct sur la viabilité financière, il peut toujours influencer la performance des investissements et la stabilité économique globale.

Cependant, ce système comporte des défis, notamment les risques associés aux fluctuations des marchés financiers, les inégalités pouvant découler des différences de revenu et de capacité d'épargne, ainsi que la complexité des choix d'investissement pour certains individus. De plus, la sécurité des investissements peut être remise en question en cas de faillite d'entreprises de gestion de fonds ou de fraudes.

Pour atténuer ces risques, des réglementations et des mesures de protection peuvent être mises en place, telles que des garanties de fonds minimums et des options d'investissement régulées. L'éducation financière des épargnants joue également un rôle crucial pour les aider à prendre des décisions éclairées.

Certains pays explorent des réformes visant à combiner les avantages des systèmes de répartition et de capitalisation, dans le but de trouver un équilibre entre sécurité et rendement, tout en réduisant les inégalités et les risques financiers.

## 1.2 Dynamique de l’allongement de l’espérance de vie et son impact sur les régimes de retraite.

### 1.2.1 Analyse de la démographie

Au cours des 20 dernières années, la structure démographique de l’Union européenne (UE) a évolué notablement, impactée par des changements dans les taux de fécondité, l’espérance de vie, et les ratios démographiques, tous ayant des implications directes sur les systèmes de pensions de retraite.

#### 1.2.1.1 Taux de natalité

Le taux de natalité<sup>5</sup> dans l’UE a légèrement augmenté depuis 2020, mais reste bien en dessous du niveau de remplacement<sup>6</sup> nécessaire pour maintenir la population stable. En 2021, le taux moyen de natalité était de 1,53 naissance par femme. Cette baisse continue du taux de natalité influence directement la structure de la population et augmente la pression sur les systèmes de retraite en réduisant le nombre de personnes en âge de travailler par rapport aux retraités. En Belgique particulièrement, on observe une baisse de 62.2%. le tableau ci-dessous nous donne un bref aperçu de ce taux dans certains pays de l’Union européenne

Année	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2015
UE-28	-	-	-	-	-	1.62	1.58
Belgique	2.54	2.25	1.68	1.62	1.67	1.86	1.70
France	-	-	-	-	1.89	2.03	1.96
Luxembourg	2.29	1.97	1.50	1.60	1.76	1.63	1.47
Italie	2.37	2.38	1.64	1.33	1.26	1.46	1.35
Allemagne	-	-	-	-	1.38	1.39	1.50

TABLE 1.2.1 – Évolution des taux de natalités dans certains pays de l’UE (source Eurostat)

#### 1.2.1.2 Espérance de vie

L’espérance de vie à la naissance dans l’UE a également connu des fluctuations, avec une augmentation générale sur le long terme. En 2022, l’espérance de vie à la naissance était de 83,3 ans pour les femmes et de 77,9 ans pour les hommes. Cependant, une légère baisse a été observée en raison de la pandémie de COVID-19, soulignant la vulnérabilité des gains d’espérance de vie face à des chocs sanitaires globaux.

A titre d’illustration, le tableau ci-dessous donne l’évolution de l’espérance de vie à divers âges en Belgique

5. le nombre de naissances vivantes pour 1 000 personnes dans une population, au cours d’une année.

6. 2,1 naissances par femme

Age	sexes	1880-1890	1940-1949	1968-1972	2000	2020	2050
0	Hommes	43.59	62.04	67.79	75.08	79.60	83.99
0	Femmes	46.63	67.26	74.21	81.42	85.51	89.73
60	Hommes	13.53	15.45	15.22	19.75	22.75	26.27
60	Femmes	14.77	17.45	19.19	24.32	27.35	30.99
80	Hommes	4.42	5.18	5.41	6.92	8.24	9.8
80	Femmes	4.8	5.79	6.33	8.85	10.57	12.91

TABLE 1.2.2 – Évolution de l’espérance dans certains pays de l’UE (Source : SPF-Économie, DG SIE)

L’analyse de l’évolution de l’espérance de vie en Belgique montre une augmentation significative à tous les âges étudiés depuis la fin du 19<sup>e</sup> siècle jusqu’aux projections pour 2050. Cette progression, de près de 40 ans à la naissance, reflète les améliorations dans les soins de santé, la technologie médicale et la qualité de vie globale. L’écart entre hommes et femmes en termes d’espérance de vie s’est également réduit. De plus, des disparités régionales et socio-économiques sont observées, avec de meilleures espérances de vie dans des régions plus aisées comme la Flandre.

Les projections indiquent que la médiane d’âge de la population de l’UE continuera d’augmenter, passant de 43,7 ans en 2019 à 48,2 ans d’ici à 2050 (commission Européenne), ce qui accentue la tendance vers une population plus âgée et potentiellement plus dépendante au fil du temps.

### 1.2.1.3 Ratio dépendance démographique des personnes âgées

Le ratio de dépendance démographique des personnes âgées est défini comme le nombre de personnes âgées de 65 ans et plus pour 100 personnes d’âge actif, à savoir . En 2023, ce ratio était de 33,4% dans l’UE, indiquant une pression accrue sur les systèmes de soutien social et de retraite à mesure que la part des personnes âgées continue de croître.

Pays/année	1950	1975	2000	2015	2025	2050	2075
UE(28 pays)	14.7	21.2	24.3	29.9	37.5	55.9	59.7
OCDE	13.9	19.5	22.5	27.9	35.2	53.2	58.6
Belgique	18.1	25.2	28.3	30.6	37.1	51.0	54.0
Allemagne	16.2	26.5	26.5	34.8	41.4	59.2	63.1
Irlande	20.9	21.4	18.0	22.3	29.0	49.9	50.9
Grèce	12.4	20.9	26.7	33.0	39.2	73.4	75.2
France	19.5	24.5	27.3	33.3	40.9	52.3	55.8

TABLE 1.2.3 – Ratio de dépendance démographique des personnes âgées : valeurs passées et projections : source (Nations unies)

Le tableau ci-dessous montre une augmentation continue des ratios de dépendance dans plusieurs pays européens jusqu’en 2075, indiquant un vieillissement général de la population et une diminution de la proportion de la population active. En particulier, la Belgique verra son ratio de dépendance passer de 30,6% en 2015 à 54,0% en 2075, mettant en évidence les défis

futurs pour les systèmes de retraite face à un nombre croissant de bénéficiaires par rapport aux cotisants. Ces changements auront aussi des répercussions sociales, influençant la qualité de vie des personnes âgées et nécessitant une planification à long terme par les décideurs pour gérer les impacts du vieillissement démographique.

L'augmentation de l'espérance de vie pose des défis financiers significatifs aux régimes de retraite, prolongeant la durée des versements des pensions et augmentant ainsi les engagements financiers des régimes. Historiquement, les ajustements nécessaires pour maintenir l'équilibre financier étaient souvent réalisés par l'augmentation des taux de cotisation, chargeant ainsi davantage les générations futures. Pour lutter contre ce déséquilibre et gérer de façon plus équitable l'impact de la longévité accrue, des réformes ont été mises en place dans plusieurs pays, intégrant des ajustements automatiques des paramètres des régimes de retraite. Ces ajustements, qui excluent souvent la révision du taux de cotisation, incluent aussi des mécanismes qui réduisent la valeur des pensions (introduction des facteurs de durabilité comme au Portugal, en Finlande) pour prendre en compte la durée prolongée des versements, visant ainsi à équilibrer les régimes et à traiter de manière plus juste les différentes générations.

### 1.3 Revue de littérature.

La relation entre les systèmes de pension et l'espérance de vie constitue une problématique centrale face au vieillissement démographique mondial. Dans ce contexte, les recherches de Bravo et Ayuso (2021) offrent une pierre angulaire en abordant les incertitudes conceptuelles à travers l'agrégation bayésienne de modèles. Cette approche innovante permet de mieux saisir les dynamiques complexes à l'œuvre dans l'indexation des pensions à l'espérance de vie, en reconnaissant les variations et incertitudes inhérentes aux projections démographiques. La méthodologie proposée par les auteurs invite à une réflexion plus nuancée et adaptable dans l'élaboration des politiques de pension, en mettant en avant la nécessité d'un cadre flexible capable de s'ajuster aux évolutions futures de la société.

La distinction entre les approches par période et par cohorte, soulignée dans l'étude d'Ayuso, Bravo et Holzmann (2021), revêt une importance capitale pour comprendre les implications à long terme des estimations de l'espérance de vie sur les systèmes de retraite. Cette analyse offre un éclairage sur le décalage potentiel entre les politiques actuelles et les réalités démographiques futures, en révélant comment des choix méthodologiques apparemment techniques peuvent influencer de manière significative la viabilité financière des régimes de pension et la répartition des charges entre les générations.

Le rapport de l'OCDE (2021), avec son panorama des politiques de pension à travers le monde, met en exergue les diverses stratégies adoptées pour faire face aux défis posés par l'allongement de la durée de vie et les contraintes économiques. Ce contexte international révèle l'éventail des réponses politiques, des ajustements automatiques de l'âge de la retraite aux réformes structurelles des systèmes de pension, en passant par la diversification des sources de revenus de retraite. Cette variété d'approches reflète la complexité des équilibres à trouver entre équité, durabilité et adaptabilité.

La question de l'équité est au cœur des préoccupations, comme le montrent les travaux d'Ayuso, Bravo, Holzmann et Palmer (2021), qui examinent l'impact de l'indexation de l'âge

de la pension sur l'espérance de vie. En identifiant les risques de disparités accrues, cette recherche met en lumière la nécessité d'une conception de politique publique qui prenne en compte non seulement les impératifs démographiques et économiques, mais aussi les principes de justice sociale.

Par ailleurs, les innovations en matière de produits financiers pour les retraités, discutées par Olivieri (2021) et Bravo ainsi que El Mekkaoui de Freitas (2018), introduisent des perspectives importantes sur la gestion du risque lié à l'augmentation de l'espérance de vie. Les annuités flexibles et les produits liés à la longévité représentent des réponses potentielles aux défis posés par l'incertitude entourant la durée de la vie post-retraite. Ces instruments financiers, en offrant des options plus adaptatives aux retraités, pourraient contribuer à réduire l'insécurité financière et à améliorer le bien-être global des personnes âgées.

Enfin, la considération de l'équité actuarielle intergénérationnelle, abordée par Bravo, Ayuso, Holzmann et Palmer (2021a et b), met en avant l'importance cruciale de politiques de pension justes et équilibrées. Face à l'accroissement de l'espérance de vie, ces études soulignent l'urgence d'ajustements des âges de retraite qui reflètent les réalités démographiques tout en préservant l'équité entre les générations.

L'ensemble des études montre que la problématique des pensions et de l'espérance de vie est multifacette et exige une approche multidisciplinaire. Les défis sont à la fois financiers, démographiques, éthiques et politiques, nécessitant des solutions innovantes, flexibles et équitables pour répondre aux besoins des populations vieillissantes tout en assurant la pérennité des systèmes de pension pour les générations futures.

Cette revue de littérature révèle une convergence vers la nécessité d'une approche holistique et bien informée dans la réforme des politiques de pension. En raison de l'évolution démographique et des défis économiques, la rigueur méthodologique, la flexibilité des instruments financiers et une forte sensibilité aux questions d'équité deviennent indispensables pour la durabilité et la justice des systèmes de retraite futurs.

## Chapitre 2

# Théorie et Principes des Mécanismes d'Ajustement Automatique (MAA)

### 2.1 Présentation des Mécanismes d'Ajustement Automatiques (MAA)

Les Mécanismes d'Ajustement Automatique (MAA) constituent une réponse stratégique à la volatilité environnementale, assurant la pérennité des systèmes de pensions par une adaptation proactive aux fluctuations démographiques et économiques. Ces mécanismes, divers dans leur conception et leurs buts, partagent l'objectif principal de mitiger les risques liés aux prévisions d'inflation, d'espérance de vie et de rendements financiers, cruciaux pour le maintien de l'équilibre des systèmes de retraite par répartition. Ils s'attaquent notamment aux variations du ratio cotisants/retraités, influencé par les dynamiques de longévité, de fécondité, d'emploi, et de migration, pour préserver la viabilité financière et l'adéquation des pensions face à ces incertitudes. Ils abordent divers aspects des politiques de pension, visant à garantir le pouvoir d'achat des retraités, la solvabilité des systèmes de pensions et leur durabilité financière. Ils facilitent l'alignement de l'âge de la retraite statutaire avec l'espérance de vie, poursuivant ainsi des objectifs d'équité intergénérationnelle, de soutenabilité financière, et d'accroissement de l'offre de travail. En outre, les MAA peuvent atténuer les coûts politiques liés à l'amélioration de la durabilité financière et réduire la nécessité de réformes fréquentes, en instaurant un cadre par défaut pour l'ajustement des paramètres de pension.

#### 2.1.1 Définition et Objectifs des MAA

##### 2.1.1.1 Historique et développement des MAA

Les systèmes de retraite ont commencé à mettre en place des ajustements automatiques des pensions dès les années 1930. À l'origine, ces ajustements étaient réalisés par le biais de l'indexation des pensions, c'est-à-dire en augmentant automatiquement les paiements des retraités en fonction de l'augmentation des prix ou des salaires. Cette pratique visait à assurer que les pensions restent suffisantes pour répondre aux besoins des bénéficiaires au fil du temps. Les pensions, qui ont été instaurées à partir de la fin du XIXe siècle, ont suscité des

préoccupations quant à leur capacité à maintenir leur pouvoir d'achat à long terme. C'est ainsi qu'est née l'idée d'indexer les pensions, pour garantir qu'elles restent adéquates. Initialement, les augmentations de pensions étaient décidées de manière discrétionnaire, dépendant des cycles économiques et politiques. Pourtant, cette approche a été perçue comme source d'incertitude et de potentielles injustices sociales.

Pour remédier à cela, plusieurs pays ont introduit des mécanismes d'indexation dans les années suivantes. Par exemple, le Danemark a instauré l'indexation des pensions sur les prix dès 1933, suivi par la France après la Seconde Guerre mondiale, et la plupart des autres pays de l'OCDE ont suivi cette tendance dans les décennies qui ont suivi. L'idée était de rendre les ajustements des pensions plus prévisibles et moins sujets aux variations politiques et économiques. L'indexation des pensions sur les salaires moyens a également vu le jour, initialement aux Pays-Bas en 1956, puis en Allemagne l'année suivante. Les périodes de forte inflation, comme celles qui ont suivi la crise pétrolière des années 1970, ont renforcé la nécessité d'introduire de tels mécanismes pour garantir que les pensions maintiennent leur valeur réelle.

### 2.1.1.2 Qu'est-ce qu'un Mécanisme d'ajustement automatique (MAA) ?

Un mécanisme d'ajustement automatique est un ensemble de mesures inscrites dans la loi qui s'appliquent instantanément lorsque la soutenabilité financière, l'adéquation sociale ou la solvabilité<sup>1</sup> d'un régime est menacée par des chocs démographiques et/ou économiques<sup>2</sup>.

Ils peuvent mettre les pensions à l'abri des incertitudes : l'indexation des pensions peut les protéger contre les tendances actuelles et futures de l'inflation et, plus généralement, les ajustements automatiques des prestations, des taux de cotisation et de l'âge de la retraite peuvent servir plusieurs objectifs.

### 2.1.1.3 Objectifs des Mécanismes d'Ajustement Automatique

Les Mécanismes d'Ajustement Automatique (MAA) jouent un rôle essentiel dans la protection des systèmes de retraite contre les fluctuations démographiques et économiques, en adaptant automatiquement les paramètres des pensions en réponse à des indicateurs prédéfinis. Ces mécanismes visent à préserver la viabilité financière et l'adéquation des prestations de retraite face à des variables telles que l'inflation, l'espérance de vie, les rendements financiers, ainsi que le ratio cotisants/retraités, impacté par des facteurs démographiques et migratoires.

Leurs utilisations liés à des indicateurs évolutifs permet de limiter les risques d'ajustements inadéquats par rapport aux ajustements discrétionnaires. Pour une meilleure gestion de la volatilité des ajustements, il est avantageux d'implémenter des mécanismes autorisant des ajustements sur plusieurs années. Comparés aux ajustements discrétionnaires, ils peuvent être conçus de manière à être moins erratiques, plus transparents et plus équitables d'une génération à l'autre. Ils ont des conséquences redistributives et doivent être soumis au débat démocratique. Une fois les MAAs en place, les responsables de l'action publique continuent de contrôler entièrement les pensions et peuvent intervenir s'ils jugent les ajustements déclenchés indésirables.

1. La solvabilité ou la soutenabilité financière d'un régime correspond à sa capacité à financer ses engagements sans accroître le taux cotisation, éventuellement avec un fond de réserves

2. <https://www.cor-retraites.fr/sites/default/files/2019-06/doc-1113.pdf>

En réponse au vieillissement de la population et aux préoccupations concernant la pérennité financière des systèmes de retraite, de nombreux pays ont modifié leurs politiques d'indexation des pensions pour réaliser des économies, illustrant la diversité des applications des MAA. Ces mécanismes peuvent inclure l'ajustement des pensions en paiement, la réévaluation des salaires passés pour le calcul des prestations, ou l'alignement de l'âge de retraite sur l'espérance de vie, couvrant ainsi un large spectre d'objectifs politiques, de la solvabilité à l'équité intergénérationnelle.

Les MAA réduisent également le coût politique associé à l'amélioration de la viabilité financière des systèmes de retraite en établissant un scénario par défaut pour l'ajustement des paramètres, ce qui nécessite des efforts politiques accrus pour toute déviation susceptible de compromettre la durabilité du système. En révélant le compromis entre les intérêts à court terme et la viabilité à long terme, les MAA clarifient les implications des politiques de retraite et encouragent les décideurs à justifier toute intervention susceptible d'affecter négativement la pérennité financière. Cela aide à équilibrer la gestion des excédents et des déficits du système de retraite, réduisant ainsi l'incertitude législative future et contribuant à la confiance dans la viabilité à long terme du système.

### **2.1.2 Types de Mécanismes d'Ajustement Automatique**

Les ajustements automatiques des pensions sociales sont des mécanismes conçus pour maintenir la viabilité financière des régimes de retraite face aux variations des paramètres économiques et démographiques, tels que l'augmentation de l'espérance de vie et les fluctuations de la natalité et de l'emploi. Ces mécanismes permettent d'adapter les systèmes de retraite aux conditions changeantes sans nécessiter une intervention législative continue.

Les mécanismes d'ajustement automatique (MAA) dans les régimes de retraite peuvent être divisés en deux catégories principales selon les facteurs qui les déclenchent : les facteurs démographiques et les facteurs financiers.

#### **2.1.2.1 MAA liés à des facteurs démographiques**

Ces ajustements prennent en compte les changements dans les prévisions de longévité, le taux de natalité, et d'autres indicateurs démographiques qui affectent le rapport entre le nombre de cotisants et le nombre de bénéficiaires. Un exemple typique serait l'ajustement de l'âge de la retraite en fonction de l'augmentation de l'espérance de vie. Cela signifie que si les gens vivent plus longtemps, ils devraient aussi travailler plus longtemps avant de pouvoir bénéficier d'une pension à taux plein, afin de maintenir l'équilibre financier du système sans augmenter les charges sur les générations futures.

#### **2.1.2.2 MAA liés à des facteurs financiers**

Ces ajustements sont généralement basés sur la performance économique ou la santé financière du régime de retraite, incluant des variables telles que les rendements des investissements, l'inflation et les salaires moyens. Par exemple, les ajustements peuvent inclure la modification du taux de remplacement ou des règles de valorisation des pensions en fonction de l'inflation ou d'autres indicateurs économiques. Cela assure que les pensions restent viables et adaptées

aux conditions économiques actuelles, protégeant ainsi le pouvoir d'achat des retraités tout en préservant la santé financière du fonds de pension.

Malgré leurs utilités dans la stabilisation plus ou moins des régimes de pension, ils posent également des défis. Par exemple, l'augmentation de l'âge de la retraite peut être impopulaire et avoir des implications sociales<sup>3</sup> et de santé pour les travailleurs âgés, en particulier ceux dans des emplois physiquement exigeants ou avec des attentes de vie plus courtes. De plus, les ajustements automatiques doivent être conçus de manière équitable pour ne pas pénaliser de manière disproportionnée certains groupes, tels que les jeunes générations ou les travailleurs à faible revenu. La transparence et la prévisibilité sont également essentielles pour que les individus puissent planifier leur retraite en toute confiance.

Les Mécanismes d'Ajustement Automatique (MAA) se manifestent de manière variée à travers le monde, reflétant les particularités nationales. Dans ce contexte, nous nous concentrerons sur les modèles spécifiques qui relient les pensions sociales à l'espérance de vie. Nous allons détailler et comparer les approches distinctes adoptées par plusieurs pays, notamment la Suède et la Finlande, parmi d'autres, pour illustrer comment ces mécanismes sont appliqués dans différents contextes nationaux.

## 2.2 Exemples de Modèles d'Ajustements Automatiques de la pension publique

L'intégration de l'augmentation de l'espérance de vie dans le calcul des pensions contribue significativement à la stabilité financière des régimes de retraite par répartition. Néanmoins, plusieurs pays ont opté pour des mécanismes d'ajustement automatique supplémentaires visant explicitement la pérennité financière de ces systèmes. La manière dont ces ajustements sont conçus et activés varie selon les pays. Par exemple, en Suède et au Canada, ces dispositifs sont activés dans des situations exceptionnelles, tandis qu'en Allemagne et au Japon, ils sont presque constamment en usage. La Suède, en particulier, est en avant-garde avec un système de retraite qui adapte automatiquement les pensions en fonction de l'évolution de l'espérance de vie et du salaire moyen. Si ces ajustements s'avèrent insuffisants pour assurer l'équilibre financier à long terme, un mécanisme complémentaire lié à un indice de solvabilité est mis en œuvre.

### 2.2.1 Modèle Suédois

La réforme du système de retraite suédois a été l'une des plus novatrices, introduisant une gestion et une autorégulation adaptées aux chocs économiques et démographiques externes. Cette réforme, pionnière dans l'intégration de l'effet de la longévité sur les pensions, a établi un modèle suivi par de nombreux autres pays. Initialement régime en prestation défini, elle a instauré un régime à cotisations définies, basé sur la technique des comptes notionnels<sup>4</sup>, tout en

---

3. Le mouvement social contre la réforme des retraites en France en 2023 mobilise pendant plusieurs mois des millions de personnes protestant contre le relèvement de 62 à 64 ans de l'âge légal de départ à la retraite et à 43 ans de la durée minimum de cotisation. Ces mesures sont portées par le gouvernement d'Élisabeth Borne, sous la présidence d'Emmanuel Macron.

4. Un régime en comptes notionnels est un régime fonctionnant en répartition, qui permet d'assurer l'équilibre actuariel en niveau 2 et par génération entre les cotisations versées et les pensions reçues, compte tenu des

préservant le principe de financement par répartition. Rappelons les principales caractéristiques du nouveau système qui s'apparente à un régime en points :

1. Le système fonctionne sur une base de cotisations définies et est de nature contributive. Cela implique que chaque cotisation effectuée établit un droit spécifique, et que l'acquisition de tout droit à pension est directement liée à des contributions préalablement versées, indépendamment de l'identité du contributeur.

2. Chaque participant au régime possède un compte individuel sur lequel sont enregistrées, de manière "virtuelle", les cotisations versées chaque année. Ces cotisations cumulées constituent un capital "notionnel", lequel est ajusté chaque année en fonction d'un indice reflétant la croissance moyenne des salaires par individu.

3. L'âge minimal requis pour prendre sa retraite est établi à 61 ans. Le montant de la pension versée est calculé à partir du capital "notionnel" accumulé, auquel est appliqué un facteur de conversion. Ce dernier varie selon l'âge réel auquel la personne part à la retraite et son espérance de vie à cet âge, correspondant ainsi à la durée prévue de la retraite.

La pension versée sous forme d'annuité est calculée de façon actuarielle, de sorte que la valeur actualisée des pensions reçues pendant la période de retraite correspond au capital notionnel accumulé durant la carrière professionnelle. Cela reflète le principe de neutralité actuarielle stricte. Par conséquent, le montant de la pension est directement lié à la durée prévue de la retraite, intégrant ainsi l'impact de l'allongement de l'espérance de vie dès le calcul initial de la pension. La méthode pour calculer cette pension est relativement simple : elle implique de convertir le capital notionnel en une rente annuelle en le divisant par un diviseur. Ce diviseur noté  $D_n$ , qui représente le coût d'achat d'une unité de rente, est calculé en fonction de l'âge de départ à la retraite, de la cohorte de l'assuré et d'un taux d'actualisation fixé à 1,6%. En Suède, cette formule est appliquée sur une base mensuelle, avec le diviseur ajusté pour chaque âge de retraite possible, par exemple à 61, 62, 63 ans, etc. On a

$$D_n = \frac{1}{12} \times \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{x=0}^{11} \frac{\left[ l_k + (l_{k+1} - l_k) \times \frac{x}{12} \right]}{l_n \times (1.016)^{\left[ (k-n) + \frac{x}{12} \right]}} \quad (2.2.1)$$

où  $l_k$  est le nombre de survivant à l'âge  $k$  calculée par cohorte à partir des tables de survie officielles. En appliquant cette formule sur les générations de 1938 à 1943 pour des âges de retraites compris entre 61 et 65 ans, on obtient le tableau 2.2.1 :

Dans le cadre actuariel, pour un groupe spécifique ou cohorte, reporter l'âge de départ à la retraite se traduit par l'octroi d'une pension accrue. Ce phénomène se justifie principalement par deux mécanismes : d'une part, une extension de la phase d'accumulation entraîne une élévation du capital notionnel ; d'autre part, la diminution du diviseur, attribuable à la réduction anticipée de la durée de la retraite, contribue également à augmenter le montant de la pension. De manière plus spécifique, pour un âge de liquidation déterminé, le facteur diviseur connaît une augmentation progressive pour les générations successives, en lien direct avec l'élévation de l'espérance de vie à cet âge.

---

modalités particulières d'acquisition et de liquidation des droits à la retraite.

Age	Coef définitif		Coef provisoires			
	Coh 1938	Coh 1939	Coh 1940	Coh 1941	Coh 1942	Coh 1943
61 ans	17.87	17.94	17.69	17.78	17.87	17.94
62 ans	17.29	17,36	17,11	17,20	17,29	17,36
63 ans	16.71	16,78	16,53	16,62	16,71	16,78
64 ans	16.13	16,19	15,96	16,05	16,13	16,19
65 ans	15.56	15,62	15,39	15,47	15,56	15,62

TABLE 2.2.1 – Diviseurs des générations 1938 à 1943 pour des âges à la liquidation compris entre 61 et 65 ans. (Source RFV)

La nécessité de prolonger la durée de travail pour annuler les effets de l'allongement de l'espérance de vie sur le taux de liquidation des pensions a été analysée dans l'étude de 2002<sup>5</sup> concernant le système de retraite. Cette analyse s'est concentrée sur les cas de retraite programmée à l'âge de 65 ans.

Cohorte née en	Atteignant l'âge de 65 ans en	Gains d'espérance de vie à 65 ans	Impact de l'espérance de vie sur la pension	Allongement de la durée d'activité neutralisant cet impact
1940	2005	0	0	0
1950	2015	11 mois	-4%	7 mois
1960	2025	20 mois	-7%	13 mois
1970	2035	28 mois	-10%	18 mois
1980	2045	35 mois	-12%	23 mois

TABLE 2.2.2 – Allongement de la durée d'activité neutralisant l'augmentation de l'espérance de vie. (source RFV)

Pour maintenir le même niveau de prestations que celles de la génération de 1940, les générations futures doivent prolonger leur vie professionnelle proportionnellement à l'augmentation de l'espérance de vie après 65 ans. Dans les systèmes à contributions définies, tels que les comptes notionnels, cet allongement du travail coïncide avec une retraite prolongée sans impacter le taux de prestations des pensions.

Bien que reconnu pour ses prouesses, le modèle suédois des retraites présente plusieurs limites. Les pensions sont vulnérables aux fluctuations économiques, entraînant des baisses significatives en période de crise, ce qui affecte le niveau de vie des retraités. Le calcul basé sur l'ensemble de la carrière désavantage ceux ayant des parcours professionnels interrompus, aggravant les inégalités, notamment pour les femmes. La complexité du système crée une incertitude sur les montants futurs des pensions, nécessitant davantage d'épargne ou de travail prolongé. Enfin, l'adaptation constante du système engendre des tensions sociales et politiques.

## 2.2.2 Modèle Néerlandais

Le système de retraite néerlandais, exemplaire de pragmatisme et d'adaptabilité, incorpore une méthode d'indexation de l'âge de retraite alignée sur les variations de l'espérance de

5. Cf. « The swedish pension system. Annual Report 2002 ». RFV

vie à 65 ans. Cette stratégie vise à équilibrer les conséquences financières des évolutions démographiques et les besoins des bénéficiaires de pensions.

### 2.2.2.1 Structure Multicouche du Système de Retraite Néerlandais

Le régime de retraite des Néerlandais est bâti sur trois piliers, chacun ayant un rôle déterminant dans l'attribution des prestations de retraite. Le premier pilier, l'Algemene Ouderdomswet (AOW), garantit une pension de base universelle à tous les résidents âgés de 15 à 65 ans, sans conditions de ressources, assurant une couverture minimale. Le deuxième pilier comprend des régimes de pension professionnels, principalement à prestations définies, intégrés à travers les accords collectifs de relations industrielles et couvrant 94% des travailleurs en 2019. Le troisième pilier se concentre sur les économies personnelles et les investissements privés en vue de la retraite, il est entièrement facultatif et repose sur l'initiative individuelle.

### 2.2.2.2 Réformes Législatives et Ajustements Progressifs

Initiée en 2012, une réforme majeure a relevé progressivement l'âge d'éligibilité pour les pensions publiques, incitant des ajustements similaires dans les pensions du deuxième et troisième piliers. Une modification législative en 2019 a ralenti la cadence des augmentations de l'âge de la retraite, instaurant un plan graduel qui maintient l'âge de retraite à 66 ans et quatre mois jusqu'en 2021, pour atteindre 67 ans entre 2022 et 2024.

### Mécanisme d'Indexation Automatique Prévu pour 2025

À partir de 2025, l'âge de la retraite sera ajusté automatiquement en fonction des changements de l'espérance de vie à 65 ans selon la formule suivante :

$$V = (L - 18.26) - (P - 65)$$

où

$L$  : Représente l'espérance de vie unisexe à l'âge de 65 ans pour une année donnée, projetée par Statistics Netherlands. Cette variable est centrale, car elle reflète l'espérance de vie actuelle à l'âge de la retraite, permettant ainsi de calibrer l'âge de retraite à un instant  $t$  par rapport aux gains en longévité.

$P$  : est l'âge d'éligibilité de l'année précédant l'année où l'augmentation est envisagée (en années)

$V$  : L'augmentation ou la stabilisation de l'âge de la retraite. Si le résultat de  $V$  est négatif ou inférieur à 0.25, l'augmentation est arrondie à zéro, ce qui signifie qu'il n'y aura pas d'augmentation de l'âge de la retraite cette année-là. Cela garantit que l'âge de la retraite n'augmente que lorsque l'augmentation de l'espérance de vie le justifie.

Nous pouvons déduire le nouvel âge de retraite en posant

$$x_{r(t)} = P + V$$

en substituant  $V$  dans la formule principale, on a

$$x_{r(t)} = P + (L - 18.26) - (P - 65)$$

puisque  $L$  est l'espérance de vie à 65 ans, on pose  $L = e_{65}^P$  alors on a

$$x_{r(t)} = 65 + (e_{65}^P(t) - 18.26)$$

cette formule mise en place vise à stabiliser la durée de la retraite à 18,26 ans, ajustant l'âge de la retraite en fonction de l'évolution de l'espérance de vie. L'intention est d'équilibrer les gains de longévité par un allongement proportionnel de la période de travail, et non par une extension du temps passé en retraite. En pratique, tout ajustement prévu de l'âge de retraite doit être annoncé cinq ans à l'avance, assurant une transparence essentielle et permettant une planification adéquate.

Le modèle de retraite néerlandais, bien que visant à offrir une sécurité financière aux retraités, présente des paradoxes et des défis importants. Le système actuel favorise ceux qui terminent bien leur carrière, car leurs cotisations de fin de carrière, plus élevées, déterminent le montant final des pensions. En revanche, une suppression de ce modèle profiterait à ceux qui commencent bien, car les cotisations de début de carrière sont investies plus longtemps avec un rendement plus élevé. La solidarité et le partage des risques sont essentiels dans ce système, mais les fonds de pensions doivent concilier leur finalité sociale avec les exigences du marché financier. Vandenbroucke (2020) propose un juste milieu entre un régime de "prestations pures" et un régime de "cotisations pures", bien que cette approche soulève des questions de solidarité intergénérationnelle et d'équité.

L'Autorité financière des marchés (AFM) et certaines associations critiquent la complexité du système et le manque de compréhension des citoyens, ce qui pourrait entraîner des déceptions et des mauvais choix durant la transition. Des économistes, comme Martin ten Cate (2019), suggèrent de remplacer le deuxième pilier par un système par répartition, garantissant un taux de remplacement de 70% et utilisant une partie des fonds de pension pour financer des projets sociétaux ambitieux. En conclusion, malgré ses avantages, le modèle de retraite néerlandais doit relever des défis de solidarité, d'équité, de complexité et d'adaptation aux chocs économiques pour rester viable et équilibré.

### 2.3 Condition d'équité et de neutralité intergénérationnelle

Dans leur étude "Indexing Pensions to Life Expectancy : Keeping the System Fair Across Generations", Mercedes Ayuso et Jorge Miguel Bravo proposent diverses stratégies pour indexer les pensions sur l'espérance de vie, en vue de maintenir un équilibre financier sans compromettre l'équité et la neutralité entre les générations. Ces stratégies comprennent l'adaptation du taux de cotisation, l'ajustement de l'âge de retraite, l'introduction de facteurs de durabilité (coefficient de longévité) et la modification des pensions en cours, afin de refléter les changements dans l'espérance de vie et les conditions économiques.

Ayuso et Bravo mettent en lumière la nécessité d'une réforme équilibrée, qui prenne en considération la justice intergénérationnelle et la pérennité financière. Bien que l'intégration de ces ajustements puisse se heurter à des obstacles politiques et sociaux, ils insistent sur le fait que des changements sont impératifs pour contrer les impacts des évolutions démographiques et économiques.

### 2.3.1 Modélisation de la condition d'équité et de neutralité intergénérationnelle

Considérons un régime de retraite à prestations définies basé sur les revenus moyens réévalués de toute la carrière, fonctionnant selon un système de répartition pure (sans apport de fond extérieur). Dans ce modèle, la pension de vieillesse est calculée actuariellement en fonction des contributions totales versées par chaque individu. Nous adoptons un principe d'équité et de neutralité actuarielle intergénérationnelle, garantissant que les ajustements marginaux nécessaires maintiennent l'équilibre entre les générations.

$$A_t \cdot C_t \cdot V_t = L_t \cdot P_{x_r(t)} \cdot a_{x_r(t)}^{\pi, y} \quad (2.3.1)$$

où  $A_t$  est le nombre de travailleurs actifs,  $C_t$  : le taux de cotisation

Le taux de rendement actuariel d'équivalence ( $y_t$ ) est un taux crucial dans le système de retraite, permettant de réévaluer les contributions versées de manière à équilibrer les revenus attendus des actifs avec les prestations futures à verser. En d'autres termes, ce taux de rendement est nécessaire pour que la valeur actuelle des cotisations versées au régime de retraite soit égale à la valeur actuelle des prestations attendues. Cela assure la viabilité financière du système en tenant compte de la réévaluation des contributions dans un contexte économique donné.

Le salaire moyen ouvrant droit à pension à vie, noté  $V_t$ , représente la moyenne des salaires perçus par les travailleurs actifs depuis leur entrée sur le marché du travail ( $x_e$ ), revalorisés à l'aide du taux de rendement actuariel d'équivalence ( $y_t$ ). La modélisation de  $V_t$  nécessite plusieurs étapes. Tout d'abord, il est nécessaire de collecter les données salariales ( $w_t$ ) des travailleurs actifs, depuis leur entrée sur le marché du travail ( $x_e$ ) jusqu'à l'année courante ( $t$ ). Ces salaires sont ensuite revalorisés en utilisant le taux de rendement actuariel d'équivalence ( $y_t$ ) afin de refléter les conditions économiques actuelles. La formule utilisée pour revaloriser un salaire  $w_i$  à l'année  $t$  est la suivante :

$$w_{i,t} = w_i \cdot \prod_{j=i}^{t-1} (1 + y_j)$$

où  $w_{i,t}$  représente le salaire  $w_i$  revalorisé à l'année  $t$ ,

Ensuite, le salaire moyen revalorisé  $V_t$  est calculé en faisant la moyenne de ces salaires revalorisés sur la période considérée. La formule pour  $V_t$  est :

$$V_t = \frac{1}{N} \sum_{i=x_e}^t w_{i,t} \quad (2.3.2)$$

où  $N$  est le nombre d'années depuis l'entrée sur le marché du travail jusqu'à l'année courante. L'évaluation de  $\omega_t$  sera faite dans la suite.

La modélisation de  $V_t$  permet d'assurer que les contributions versées tout au long de la carrière des travailleurs sont correctement ajustées, garantissant ainsi un équilibre actuariel entre les cotisations et les prestations futures.

La formule  $P_{x_r(t)} = \theta_t (x_r(t) - x_e) \cdot \overline{RE}_{x_r(t)} \cdot SF_{x_r(t)} \cdot b_{x_r(t)}$  modélise la prestation de retraite annuelle pour tous les retraités, en tenant compte de divers paramètres économiques et démographiques. Voici une explication détaillée de chaque composant de la formule et de son utilisation pratique :

1.  $\theta_t$  : Le taux d'accumulation linéaire est généralement fixe pour chaque année de service. Ce paramètre permet de déterminer le taux de remplacement<sup>6</sup> cible du régime de retraite.
2.  $(x_r(t) - x_e)$  : La durée moyenne des cotisations représente la période pendant laquelle un individu a cotisé au régime de retraite. Elle est calculée en soustrayant l'âge d'entrée sur le marché du travail ( $x_e$ ) de l'âge de retraite ( $x_r(t)$ ). Par exemple, si  $x_e = 25$  et  $x_r(t) = 65$ , la durée de cotisation est de 40 ans
3.  $\overline{RE}_{x_r(t)}$  : Le revenu moyen revalorisé jusqu'à l'âge de retraite  $x_r(t)$  est le salaire moyen des travailleurs actifs ajusté pour tenir compte de l'inflation et des variations économiques. Il est modélisé comme suit :

$$\overline{RE}(x_r(t), x_e, w_t, v_t) = \frac{RE_{x_r(t)}}{(x_r(t) - x_e)}$$

avec

$$RE_{x_r(t)} = \left( w_t^{x_r(t)} + \sum_{x=x_0}^{x_r(t)-1} w_{t-x_r(t)+x}^{x_r(t)} \prod_{j=t-x_r(t)+x+1}^t (1 + v_j) \right)$$

où  $v_t$  désigne le taux auquel les contributions annuelles sont réévaluées.

Dans le contexte des systèmes de retraite,  $v_t$  et  $y_t$  sont deux paramètres importants, mais distincts qui jouent des rôles cruciaux dans le calcul des prestations et la viabilité financière du système.  $v_t$  permet de définir le niveau des prestations. Il s'agit d'une combinaison de l'indice des prix à la consommation (CPI) et de la croissance de la productivité. Ce taux reflète l'ajustement économique des contributions passées pour maintenir leur valeur réelle au fil du temps. En revanche,  $y_t$  est le taux de rendement actuariel d'équivalence utilisé pour équilibrer les revenus des actifs avec les prestations futures à verser.

Le rôle de  $v_t$  est d'ajuster les contributions passées en fonction des conditions économiques actuelles, notamment l'inflation et la productivité. Cela affecte directement le revenu moyen revalorisé ( $\overline{RE}$ ), qui influence le montant des prestations de retraite. Une valeur de  $v_t$  plus élevée augmente la valeur des contributions passées, ce qui se traduit par des prestations de retraite plus élevées. De son côté,  $y_t$  assure que le système de retraite reste financièrement viable en équilibrant les valeurs présentes des cotisations et des prestations. Un  $y_t$  plus élevé indique un rendement requis plus élevé pour maintenir l'équilibre actuariel du système, influençant ainsi la détermination du montant des cotisations nécessaires pour financer les prestations futures.

---

6.  $\theta_t \cdot (x_r(t) - x_e)$  : taux de remplacement cible du régime

Les formules et utilisations des deux taux différents également.  $v_t$  est utilisé dans la formule pour revaloriser les salaires historiques dans le calcul du revenu total revalorisé. Cette revalorisation affecte directement la formule du revenu moyen revalorisé, qui est calculée en divisant le revenu total revalorisé par le nombre d'années de carrière. En revanche,  $y_t$  est souvent intégré dans les calculs actuariels pour déterminer les besoins de financement du système de retraite.

4.  $SF_{x_r(t)}$  : Le facteur de durabilité est un mécanisme crucial introduit dans certains systèmes de retraite pour ajuster automatiquement les prestations en fonction des évolutions de l'espérance de vie. Son objectif principal est de maintenir l'équilibre financier des régimes de retraite en adaptant les prestations aux changements démographiques, notamment l'augmentation de l'espérance de vie. En ajustant les prestations de retraite en fonction de l'espérance de vie, le facteur de durabilité vise à répartir équitablement les risques et les coûts entre les générations, assurant ainsi la viabilité à long terme des systèmes de retraite.

il fonctionne en réduisant les prestations initiales et futures des pensions pour compenser l'augmentation des coûts due à une espérance de vie plus longue. Par exemple, si l'espérance de vie augmente, le facteur de durabilité réduit les prestations pour maintenir l'équilibre financier du système. Cette réduction est souvent proportionnelle à l'augmentation de l'espérance de vie par rapport à une année de référence. Formulé mathématiquement, cela peut être représenté comme le ratio entre l'espérance de vie à une année de base et l'espérance de vie à l'année de retraite prévue.

Les mécanismes de facteur de durabilité varient selon les pays. Par exemple, le Portugal a introduit ce facteur en 2008, ajustant les pensions en fonction de l'espérance de vie calculée à l'âge de 65 ans. En 2014, l'année de référence a été changée de 2006 à 2000, augmentant les pénalités pour une retraite anticipée. La formule utilisée pour le facteur de durabilité au Portugal est la suivante :

$$SF_{Por}(t) = \frac{e_{65}^P(2000)}{e_{65}^P(t-1)}$$

où  $e_{65}^P(t)$  est l'espérance de vie à 65 ans l'année précédente. Ce coefficient est révisé chaque année pour s'ajuster aux nouvelles données démographiques.

En Finlande, le facteur de durabilité a été introduit en 2005 et ajusté en 2010 pour inclure un coefficient d'espérance de vie, basé sur les tables de mortalité de cinq ans. La formule est :

$$SF_{Fin}(t) = \frac{a_x(t_0)}{a_x(t)}$$

où  $a_x(t)$  est le facteur d'annuité calculé à l'âge de 62 ans. Ce coefficient est révisé chaque année pour intégrer les nouvelles données de mortalité.

L'impact du facteur de durabilité est de réduire les prestations de retraite pour compenser les coûts supplémentaires associés à une vie plus longue. Par exemple, au

Portugal, le coefficient de durabilité pour 2020 était de 0,8480, ce qui a entraîné une réduction de 15,20% des prestations initiales pour les travailleurs prenant leur retraite avant l'âge normal de la retraite. En Espagne, l'application du facteur de durabilité aurait réduit les prestations de 1,18% en 2020 si le facteur n'avait pas été suspendu. En Finlande, le facteur de durabilité a conduit à une réduction progressive des prestations pour compenser l'augmentation de l'espérance de vie.

5.  $b_{x_r(t)}$  : Ce paramètre ajuste le montant de la pension en fonction de l'anticipation ou du retardement de la retraite. Si  $b_{x_r(t)} > 1$ , cela indique que la pension est augmentée en raison d'une retraite retardée. Si  $b_{x_r(t)} < 1$ , cela signifie que la pension est réduite en raison d'une retraite anticipée. Nous allons supposer pour la suite de  $b_{x_r(t)} = 1$  c'est-à-dire que le retraité va à la retraite à l'âge  $x_r(t)$ .

$a_{x_r(t)}^{\pi,y} := \sum_{\tau=1}^{\omega-x_r} \left( \frac{1+\pi_\tau}{1+y_\tau} \right)^t \tau p_{x_r(t)}$ . est le facteur de rente viagère où  $\pi_\tau$  est le taux de revalorisation des pensions,  $\tau p_{x_r(t)}$  est la probabilité qu'un individu de la cohorte d'âge  $x_r$  à l'instant  $t$  de vivre  $\tau$ -année.

Soit  $D_t = \frac{L_t}{A_t}$ , représentant le rapport de dépendance des personnes âgées, ce rapport entre le nombre de pensionnés et le nombre de travailleurs actifs du régime, mesure la dépendance des retraités par rapport aux actifs, l'équation 2.3.1 peut se réécrire comme suit :

$$C_t \cdot V_t = D_t \cdot P_{x_r(t)} \cdot a_{x_r(t)}^{\pi,y} \quad (2.3.3)$$

Si la longévité augmente (voir équation 2.3.3), les paramètres du régime de retraite tels que l'âge de départ à la retraite, le taux de cotisation et les formules de calcul doivent être ajustés pour maintenir l'équité et la neutralité intergénérationnelles, évitant ainsi le besoin de financements externes. Pour assurer cette équité entre les premières générations ( $t_0$ ) et les suivantes  $t$ , le ratio cotisations/ prestations doit être maintenu.

$$\frac{C_t \cdot V_t}{D_t \cdot P_{x_r(t)} \cdot a_{x_r(t)}^{\pi,y}} = \frac{C_0 \cdot V_0}{D_0 \cdot P_{x_r(0)} \cdot a_{x_r(0)}^{\pi,y}} \quad (2.3.4)$$

$$\frac{C_t \cdot V_t}{C_0 \cdot V_0} = \frac{D_t \cdot P_{x_r(t)} \cdot a_{x_r(t)}^{\pi,y}}{D_0 \cdot P_{x_r(0)} \cdot a_{x_r(0)}^{\pi,y}} \quad (2.3.5)$$

Prenons pour hypothèse que les individus des deux cohortes prennent leurs retraites à taux plein soit 40 années de carrières, les coefficients de l'espérance de vie  $SF_{x_r(t)}$  sont constants dans le temps et que le régime ne reçoit aucun financement de l'extérieur  $F_t = 0$  pour tout  $t$  alors l'équation 2.3.5 devient :

$$\frac{c_t}{c_0} \cdot \frac{V_t}{V_0} = \frac{D_t}{D_0} \cdot \frac{\theta_t (x_{r(t)} - x_e)}{\theta_0 (x_{r(0)} - x_e)} \cdot \frac{\overline{RE}_{x_r(t)}}{\overline{RE}_{x_r(0)}} \cdot \frac{a_{x_r(t)}^{\pi,y}}{a_{x_r(0)}^{\pi,y}}. \quad (2.3.6)$$

Les équations 2.3.5 et 2.3.6 permettent non seulement de construire des mécanismes d'ajustements automatiques, mais aussi de mettre en place des stratégies de politiques de retraites pouvant absorber les répercussions des chocs économiques et démographiques tout en garantissant l'équité et la neutralité actuarielle entre les générations.

## 2.3.2 Modélisation des mécanismes d'ajustements automatiques

### 2.3.2.1 Ajustement du taux de cotisation

Le taux de cotisation constitue le principal levier dans un régime par répartition à prestation défini, les bénéficiaires doivent être déterminés suivant des règles spécifiques et les cotisations doivent être ajustées pour couvrir les coûts accrus résultant d'une espérance de vie prolongée en tenant compte de l'âge de la retraite et de la formule de calcul des prestations.

Si l'on suppose que le taux de rendement actuariel d'équilibre  $y_t$  est équivalent au taux de réévaluation des contributions  $v_t$ , c'est-à-dire que  $\forall t, v_t = y_t$ , alors  $V_t = \overline{RE}x_{r(t)}$  et si  $\forall t, \theta_t (x_{r(t)} - x_e) = \theta_0 (x_{r(0)} - x_e)$  (taux de remplacement cible constant) Dans ce contexte, la dynamique du taux de cotisation  $c_t$  nécessaire pour faire face à l'allongement de la vie se déduit de l'équation 2.3.6.

$$\frac{c_t}{c_0} = \frac{D_t}{D_0} \cdot \frac{a_{x_r(t)}^{\pi,y}}{a_{x_r(0)}^{\pi,y}}.$$

on en déduit

$$c_t = c_0 \cdot \frac{D_t}{D_0} \cdot \frac{a_{x_r(t)}^{\pi,y}}{a_{x_r(0)}^{\pi,y}}. \quad (2.3.7)$$

L'équation 2.3.7 donne l'expression du taux de cotisation nécessaire pour faire face à l'augmentation du taux de survie et au vieillissement de la population. ce taux dépend de deux facteurs.

Nous analysons l'évolution de la valeur du facteur de rente au fil du temps par rapport à sa valeur initiale. il reflète le montant nécessaire pour fournir une pension ou une annuité donnée, en prenant en compte l'espérance de vie et d'autres facteurs actuariels.

De même, on évalue l'évolution du quotient de vieillesse des personnes âgées dans le temps par rapport à une valeur de référence :

- si  $\frac{D_t}{D_0} > 1$ , cela signifie que le Quotient de vieillesse au temps  $t$  a augmenté par rapport au temps initial  $t_0$ . Il y a une plus grande proportion de retraités par rapport aux travailleurs actifs, ce qui peut indiquer un vieillissement de la population, une augmentation de l'espérance de vie, ou une détérioration du marché du travail. Dans ce cas, des ajustements tels qu'une augmentation du taux de cotisation peuvent être nécessaires pour maintenir la viabilité financière du régime de retraite.
- si  $\frac{D_t}{D_0} < 1$ , cela indique que le Quotient de vieillesse a diminué par rapport à la valeur de base, suggérant une amélioration des conditions démographiques ou du marché du travail, ou une diminution de l'espérance de vie. Dans ce scénario, il pourrait y avoir une marge pour réduire le taux de cotisation tout en maintenant l'équilibre du régime.

### 2.3.2.2 Ajustement de l'âge de la retraite tout en maintenant le taux de remplacement constant

Dans le scénario où l'âge de la retraite est ajusté tout en maintenant le taux de remplacement, la période de cotisation est prolongée sans que cela se traduise par des droits à pension plus élevés. Cet objectif est atteint en réduisant le taux d'accumulation par année. Ainsi, même si les travailleurs cotisent pendant une période plus longue, les droits à pension ne sont pas proportionnellement augmentés. Cette approche repose sur des formules DB basées sur l'ensemble de la période de cotisation, qui lissent l'effet des années de revenu de travail anormalement bas ou élevé, offrant ainsi une évaluation plus stable et prévisible des droits à pension.

L'impact des années supplémentaires de travail sur les revenus moyens réévalués de toute une vie est faible, car ces revenus sont réévalués de manière uniforme au taux de rendement interne du régime. En conséquence, les années supplémentaires de travail n'entraînent pas une augmentation disproportionnée des droits à pension. Ce lissage réduit les variations extrêmes et maintient une évaluation cohérente des droits à pension, ce qui permet de prolonger la période de travail tout en assurant l'équité inter-générationnelle.

Le nouveau taux d'acquisition linéaire est donné par :

$$\forall t : \theta_t \cdot (x_r(t) - x_e) = \theta_0 \cdot (x_r(0) - x_e) \Rightarrow \theta_t = \theta_0 \cdot \frac{(x_r(0) - x_e)}{(x_r(t) - x_e)}$$

Partant de l'équation 2.3.6

$$\frac{c_t}{c_0} \cdot \frac{V_t}{V_0} = \frac{D_t}{D_0} \cdot \frac{\theta_t (x_r(t) - x_e)}{\theta_0 (x_r(0) - x_e)} \cdot \frac{RE_{x_r}(t)}{(x_r(t) - x_e)} \cdot \frac{(x_r(0) - x_e)}{RE_{x_r}(0)} \cdot \frac{a_{x_r}^{\pi, y}(t)}{a_{x_r}^{\pi, y}(0)}$$

Nous maintenons le taux de cotisation constant au fil du temps :  $c_t = c_0$  et les revenus sont réévalués au taux de rendement actuariel d'équilibre ( $v_t = y_t \forall t$ ) alors  $V_t = RE_{x_r(t)}$ , simplification des différents paramètres, nous obtenons.

$$1 = \frac{D_t}{D_0} \cdot \frac{a_{x_r}^{\pi, y}(t)}{a_{x_r}^{\pi, y}(0)} \cdot \frac{(x_r(0) - x_e)}{(x_r(t) - x_e)} \quad (2.3.8)$$

Supposons que le taux de revalorisation des pensions ( $\pi_t$ ) est égale taux de rendement actuariel d'équilibre, c'est-à-dire  $\pi_t = y_t \forall t$  alors

$$a_{x_r}^{\pi, y}(t) := \sum_{\tau=1}^{\omega-x_r} \left( \frac{1 + \pi_\tau}{1 + y_\tau} \right)^t \tau p_{x_r(t)} = \sum_{\tau=1}^{\omega-x_r} \tau p_{x_r(t)} = e_{x_r}^c(t) \quad (2.3.9)$$

où  $e_{x_r}^c(t)$  est l'espérance de vie par cohorte d'un individu à l'âge  $x_r(t)$ . l'équation 2.3.10 devient :

$$1 = \frac{D_t}{D_0} \cdot \frac{e_{x_r}^c(t)}{e_{x_r}^c(0)} \cdot \frac{(x_r(0) - x_e)}{(x_r(t) - x_e)}$$

Ainsi

$$\frac{e_{x_r}^c(t)}{(x_r(t) - x_e)} = \frac{D_0}{D_t} \cdot \frac{e_{x_r}^c(0)}{(x_r(0) - x_e)} \quad (2.3.10)$$

Cette équation montre que, pour maintenir un régime de pension équitable et neutre sur le plan actuariel tout en gardant le taux de remplacement constant face à l'augmentation de la longévité, il est nécessaire d'ajuster l'âge de la retraite. L'ajustement doit garantir que la proportion des années passées à la retraite par rapport aux années de cotisation reste identique à celle de la génération de référence initiale, diminuée par le taux d'augmentation du ratio de dépendance des personnes âgées.

Dans un contexte de vieillissement de la population, le ratio  $D_0/D_t$  diminue ( $D_0/D_t < 1$ ), ce qui signifie que les futurs retraités passeront une proportion plus courte de leur vie à la retraite comparativement aux générations précédentes.

### 2.3.2.3 Ajustement de l'âge de la Retraite tout en Améliorant les Pensions

L'adéquation des pensions est essentielle pour garantir que les prestations de retraite fournissent un revenu suffisant pour maintenir le bien-être économique et social des retraités. Cela permet aux retraités de vivre décemment et de conserver un niveau de vie proche de celui qu'ils avaient pendant leur vie active. Ajuster l'âge de la retraite en fonction de l'espérance de vie et des conditions économiques est une approche stratégique pour assurer la durabilité financière des systèmes de retraite, tout en veillant à ce que les prestations restent suffisantes pour répondre aux besoins des retraités.

En augmentant l'âge de la retraite et en prolongeant la période de cotisation tout en maintenant constant le taux de d'accumulation linéaire  $\theta_t$ , on obtient une augmentation du taux de remplacement. Cela permet d'améliorer l'adéquation des pensions sans modifier les autres paramètres du régime. Ainsi, les retraités peuvent bénéficier de prestations plus élevées.

Cette mesure entraîne une augmentation des contributions totales versées par les individus, car ils cotisent pendant une période plus longue. En conséquence, les prestations de retraite augmentent, offrant ainsi des pensions plus élevées aux retraités.

Partant de l'équation 2.3.6

$$\frac{c_t}{c_0} \cdot \frac{V_t}{V_0} = \frac{D_t}{D_0} \cdot \frac{\theta_t (x_r(t) - x_e)}{\theta_0 (x_r(0) - x_e)} \cdot \frac{RE_{x_r}(t)}{(x_r(t) - x_e)} \cdot \frac{(x_r(0) - x_e)}{RE_{x_r}(0)} \cdot \frac{a_{x_r}^{\pi,y}(t)}{a_{x_r}^{\pi,y}(0)}$$

Nous maintenons le taux de cotisation constant au fil du temps :  $c_t = c_0$  et les revenus sont réévalués au taux de rendement actuariel d'équilibre ( $v_t = y_t \forall t$ ) alors  $V_t = \overline{RE}_{x_r(t)}$ , simplification des différents paramètres, nous obtenons.

$$a_{x_r}^{\pi,y}(t) = \frac{D_0}{D_t} \cdot a_{x_r}^{\pi,y}(0) \quad (2.3.11)$$

Supposons que le taux de revalorisation des pensions ( $\pi_t$ ) est égale taux de rendement actuariel d'équilibre, c'est-à-dire  $\pi_t = y_t \forall t$  alors d'après l'équation 2.3.10

$$a_{x_r}^{\pi,y}(t) = \sum_{\tau=1}^{\omega-x_r} \tau p_{x_r}(t) = e_{x_r}^c(t)$$

où  $e_{x_r}^c(t)$  est l'espérance de vie par cohorte d'un individu à l'âge  $x_r(t)$ .

L'équation 2.3.11 devient :

$$e_{x_r}^c(t) = e_{x_r}^c(0) \cdot \frac{D_0}{D_t} \quad (2.3.12)$$

L'équation 2.3.12 permet de projeter l'espérance de vie future des cohortes de retraités en fonction des changements démographiques. Elle indique que l'espérance de vie à une année donnée est proportionnelle à l'espérance de vie initiale, ajustée par le ratio des facteurs démographiques entre l'année initiale et l'année de projection. Si les conditions démographiques s'améliorent (par exemple, une réduction de la mortalité), l'espérance de vie future augmente. Inversement, si les conditions se détériorent, l'espérance de vie future diminue.

#### 2.3.2.4 Ajustement de l'âge de la Retraite tout en gardant l'espérance de vie constant

L'amélioration des perspectives de survie sans changement du ratio de dépendance permet de maintenir une espérance de vie constante à la retraite. En ajustant l'âge de la retraite, on s'assure que les droits à pension accumulés restent proportionnels aux contributions versées. Conformément à l'équation 2.3.12

$$e_{x_r}^c(t) = e_{x_r}^c(0) \cdot \frac{D_t}{D_0}$$

, si le ratio des dépendances  $\frac{D_t}{D_0} = 1$ , alors l'espérance de vie à la retraite reste inchangée

$$e_{x_r}^c(t) = e_{x_r}^c(0)$$

.

Pour garantir l'équité actuarielle et la viabilité financière du système de retraite, il est crucial d'ajuster l'âge de la retraite de manière que le ratio de dépendance reste constant, soit  $D_t = D_0$ . Cette approche permet de préserver l'équilibre entre les générations de cotisants et de bénéficiaires, en maintenant des droits à pension proportionnels aux contributions (Politique CAR<sup>7</sup>).

#### 2.3.2.5 Ajustement de la pension d'entrée grâce au facteur de durabilité

Pour un âge de la retraite donné, les facteurs de durabilité diminuent les droits à pension afin de compenser les coûts supplémentaires des pensions liés à l'allongement de l'espérance de vie. Ces facteurs de durabilité réduisent progressivement le taux de remplacement des pensions, un taux souvent mal compris comme une indication de la générosité du régime. Dans certains pays, comme le Portugal, l'introduction de ces facteurs a été initialement associée à des approches flexibles de l'âge de la retraite. Cela incluait la possibilité pour les travailleurs de prolonger leur vie professionnelle pour compenser les réductions de pension causées par le facteur de durabilité, une solution souvent recommandée par les actuaires professionnels pour maintenir l'équilibre financier des régimes de retraite.

7. Politique CAR : politique qui vise à considérer le taux d'accumulation constant au fil du temps

partant de l'équation :

$$\frac{c_t}{c_0} \cdot \frac{V_t}{V_0} = \frac{D_t}{D_0} \cdot \frac{\theta_t (x_r(t) - x_e)}{\theta_0 (x_r(0) - x_e)} \cdot \frac{\overline{RE}_{x_r}(t)}{\overline{RE}_{x_r}(0)} \cdot \frac{a_{x_r}^{\pi,y}(t)}{a_{x_r}^{\pi,y}(0)} \cdot \frac{SF_{x_r}(t)}{SF_{x_r}(0)} \quad (2.3.13)$$

en maintenant tous les paramètres économiques constants, on obtient

$$1 = \frac{D_t}{D_0} \cdot \frac{a_{x_r}^{\pi,y}(t)}{a_{x_r}^{\pi,y}(0)} \cdot \frac{SF_{x_r}(t)}{SF_{x_r}(0)} \implies SF_{x_r}(t) = SF_{x_r}(0) \cdot \frac{D_0}{D_t} \cdot \frac{a_{x_r}^{\pi,y}(0)}{a_{x_r}^{\pi,y}(t)} \quad (2.3.14)$$

La formule 2.3.14 ajuste les droits à pension pour maintenir l'équilibre financier des régimes de pension tout en assurant l'équité intergénérationnelle. Le terme  $SF_{x_r(0)}$  représente le point de départ, basé sur les conditions initiales. Le rapport des facteurs de rente,  $\frac{a_{x_r}^{\pi,y}(0)}{a_{x_r}^{\pi,y}(t)}$ , ajuste les pensions en fonction des changements dans les valeurs actuarielles des futures prestations de retraite, reflétant les coûts accrus dus à l'augmentation de l'espérance de vie. Le rapport des facteurs démographiques,  $\frac{D_0}{D_t}$ , tient compte des modifications dans la structure démographique, notamment l'augmentation du ratio de dépendance des personnes âgées.

En pratique, cette formule indique que dans un contexte d'augmentation de la longévité et de vieillissement de la population, les pensions d'entrée doivent être ajustées progressivement pour maintenir l'équilibre financier du régime et l'équité entre les générations. En ajustant les pensions selon cette formule, le système de pension veille à ce que les coûts supplémentaires liés à une espérance de vie plus longue soient répartis équitablement entre les retraités actuels et futurs, garantissant ainsi la viabilité financière à long terme du régime de pension.

## Conclusion

Les mécanismes d'ajustement automatique (MAA) sont indispensables pour assurer la viabilité et l'équité des systèmes de retraite dans un contexte de fluctuations démographiques et économiques. En ajustant automatiquement des paramètres clés tels que l'âge de la retraite, les taux de cotisation et les droits à pension, les MAA offrent une réponse proactive et équilibrée aux défis posés par l'allongement de l'espérance de vie et le vieillissement de la population. Les exemples des modèles suédois et néerlandais illustrent comment ces mécanismes peuvent être adaptés avec succès pour maintenir l'équilibre financier des régimes de retraite. En définitive, les MAA permettent de préserver la justice intergénérationnelle et d'assurer une répartition équitable des ressources, tout en garantissant la stabilité et la durabilité des systèmes de retraite à long terme.

## Chapitre 3

# Modèles Quantitatifs de Longévité

L'espérance de vie est une estimation statistique qui indique combien de temps, en moyenne, une personne peut s'attendre à vivre, basée sur divers facteurs tels que le sexe, l'année de naissance et d'autres influences démographiques et socio-économiques. Pour calculer cette mesure, les démographes et les actuaires utilisent des tables de mortalité, qui recueillent des données sur la mortalité et la survie d'une population.

Historiquement, différentes méthodes et modèles mathématiques, comme ceux de De Moivre, Gompertz, Makeham, Weibull, et la fonction logistique, ont été employés pour évaluer l'espérance de vie avec précision. Dans les approches modernes, des techniques plus avancées telles que le modèle de Lee Carter, sa variante Poisson, le modèle CBD (Cairns-Blake-Dowd) et les modèles bayésiens sont utilisées pour affiner ces estimations et mieux gérer l'incertitude associée aux projections de l'espérance de vie.

Ces outils sont essentiels pour l'évaluation des politiques publiques, notamment les régimes de retraite et les systèmes de santé, car ils offrent un aperçu crucial de la longévité et des perspectives de survie des populations. En fournissant ces évaluations précises, les décideurs peuvent mieux planifier et mettre en œuvre des stratégies adaptées aux réalités démographiques actuelles et futures.

### 3.1 Modèles stochastiques mortalité.

#### 3.1.1 Calcul des taux Bruts

##### 3.1.1.1 Présentation de l'estimateur de Hoem

L'estimation des taux bruts de mortalité est cruciale en démographie et en actuariat pour évaluer le risque associé à des populations spécifiques. Les taux de mortalité sont essentiels pour calculer les probabilités de décès, qui à leur tour influent sur la planification financière des régimes de retraite et des assurances-vie. Pour estimer ces taux, différents estimateurs ont été développés, chacun avec ses propres hypothèses et contextes d'application. Commençons par examiner l'estimateur binomial avant de passer à l'estimateur de Hoem, qui est une avancée par rapport au premier.

### L'Estimateur Binomial

L'estimateur binomial est une approche directe pour estimer les taux de mortalité, basée sur le ratio du nombre de décès observés sur le nombre total d'individus exposés au risque de décès dans une période donnée. Si on note  $d_x$  le nombre de décès observés dans un groupe d'âge  $x$  et  $N_x$  le nombre total d'individus de ce groupe d'âge exposés au risque, le taux brut de mortalité  $q_x$  peut être estimé comme suit :

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{N_x}$$

Cette méthode repose sur l'hypothèse que la probabilité de décès est constante au sein du groupe et que chaque individu a la même probabilité de décès, ce qui simplifie le calcul, mais peut ne pas refléter avec précision la réalité dans des populations hétérogènes ou lorsque la taille de l'échantillon est petite.

### L'Estimateur de Hoem

L'estimateur de Hoem propose une amélioration en prenant en compte la durée exacte d'exposition au risque de chaque individu, plutôt que de supposer une exposition uniforme pour tous les membres du groupe. Cette méthode est particulièrement utile pour ajuster les estimations des taux de mortalité dans les études longitudinales où les individus entrent et sortent de l'étude à différents moments.

Supposons que pour chaque individu  $i$  dans le groupe d'âge  $x$ , nous avons une exposition au risque  $E_{x_i}$ , qui représente le temps pendant lequel l'individu a été effectivement exposé au risque de décès. L'estimateur de Hoem pour le taux de mortalité peut alors être formulé comme :

$$\hat{q}_{x,t} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{x,t}} d_{x_i,t}}{\sum_{i=1}^{n_{x,t}} E_{x_i,t}}$$

où  $d_{x_i}$  est un indicateur de décès pour l'individu  $i$  dans le groupe d'âge  $x$ , prenant la valeur 1 si l'individu  $i$  est décédé et 0 sinon.

Cet estimateur permet une évaluation plus précise des taux de mortalité en tenant compte de la durée exacte pendant laquelle chaque individu a été exposé au risque de décès. Il est particulièrement adapté pour les données de panel ou de cohorte, où l'information sur la période d'exposition au risque est disponible pour chaque individu. Il améliore la précision des estimations des taux de mortalité, en particulier dans les études démographiques et actuarielles, en ajustant pour les différences dans la durée d'exposition au risque, ce qui est particulièrement important dans les analyses de survie et les études longitudinales.

### 3.1.2 Modèle de Lee Carter

Le modèle de Lee-Carter est une approche statistique développée en 1992 par Ronald Lee et Lawrence Carter pour modéliser et prévoir les taux de mortalité et l'espérance de vie.

C'est un modèle démographique devenu fondamental dans le domaine de l'actuariat et de la démographie pour sa capacité à capter les tendances et les améliorations de la longévité sur le long terme. Le modèle a été conçu initialement pour analyser les données de mortalité des États-Unis, mais il a depuis été appliqué à de nombreux autres contextes nationaux et populations.

### 3.1.2.1 Structure du Modèle

Le modèle de Lee-Carter s'exprime comme suit :

$$\ln(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

où :

- .  $\mu_{x,t}$  est le taux de mortalité à l'âge  $x$  et à l'année  $t$ .
- .  $\alpha_x$  capte la log-mortalité moyenne spécifique à l'âge  $x$ , considérée constante au fil du temps.
- .  $\beta_x$  indique la sensibilité de la mortalité à l'âge  $x$  face aux variations de  $k_t$ , illustrant comment certains âges sont plus influencés par les évolutions générales de la mortalité.
- .  $k_t$  est un facteur de temps montrant les tendances générales de la mortalité au fil du temps.
- .  $\varepsilon_{xt}$  est un terme d'erreur aléatoire suivant une distribution normale centrée  $N(0, \sigma^2)$ , indiquant une variance constante.

### 3.1.2.2 Identifiabilité du modèle

Le modèle souffre d'un problème d'identifiabilité, car il peut être reformulé en

$$\ln(\mu_{xt}) = \alpha_x + (c\beta_x) \frac{k_t}{c} + \varepsilon_{xt}$$

, avec  $c \neq 0$ .

Pour garantir l'identifiabilité, deux contraintes sont imposées : la somme des  $\beta_x$  sur tous les âges est fixée à 1, et la somme des  $k_t$  sur toutes les périodes est égale à 0.

### Estimation des Paramètres

Pour estimer les paramètres du modèle Lee-Carter, la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) est privilégiée. Cette approche consiste à trouver les valeurs de  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ , et  $k_t$  qui minimisent la somme des carrés des écarts entre les logarithmes des taux de mortalité observés et ceux estimés par le modèle. Mathématiquement, cela se traduit par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t) = \underset{\alpha_x, \beta_x, k_t}{\operatorname{argmin}} \sum_{x,t} (\ln(\hat{\mu}_{xt}) - \alpha_x - \beta_x k_t)^2$$

**Estimation des  $\alpha_x$** 

L'estimation des  $\alpha_x$  repose sur l'annulation du gradient de la fonction de perte par rapport à  $\alpha_x$ , ce qui conduit à exprimer chaque  $\alpha_x$  comme la moyenne temporelle des logarithmes observés des taux de mortalité pour chaque âge  $x$ . Formellement, les  $\alpha_x$  sont calculés comme suit :

$$\sum_{t=t_m}^{t_M} (\ln(\hat{\mu}_{xt}) - \alpha_x - \beta_x k_t) = 0, \quad \forall x \in [x_m, x_M]$$

Cette expression indique que pour chaque âge  $x$ , la somme des différences entre les logarithmes des taux de mortalité observés et les taux estimés par le modèle, ajustés par les paramètres  $\alpha_x$  et  $\beta_x k_t$ , doit être nulle sur l'ensemble de la période d'étude, de  $t_m$  à  $t_M$ . Cela assure que les estimations de  $\alpha_x$  minimisent l'écart entre les observations et les prédictions du modèle pour chaque âge spécifique.

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln(\hat{\mu}_{xt})$$

où  $t_M - t_m + 1$  représente le nombre total d'années dans l'étude, et  $\ln(\hat{\mu}_{xt})$  est le logarithme du taux de mortalité observé à l'âge  $x$  et à l'année  $t$ .

Cet ajustement permet de capturer la structure de mortalité moyenne par âge, en considérant que  $\alpha_x$  reste constant au fil du temps. Cette étape s'assure que la composante de mortalité propre à chaque âge soit correctement intégrée au modèle, offrant une base solide pour l'analyse des tendances temporelles à travers les paramètres  $\beta_x$  et  $k_t$ .

**Estimation des paramètres  $\beta_x$  et  $k_t$** 

L'estimation des paramètres  $\beta_x$  et  $k_t$  dans le modèle de Lee-Carter est effectuée grâce à la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD). Considérons une matrice  $Z$  de dimensions  $(x_M - x_m + 1) \times (t_M - t_m + 1)$  où chaque élément  $Z_{xt}$  est défini par  $\ln(\hat{\mu}_{xt}) - \hat{\alpha}_x$ . Pour estimer les paramètres  $\beta_x$  et  $k_t$ , la matrice  $Z$  sera approximée par le produit de deux vecteurs, visant une décomposition optimale au sens des moindres carrés ordinaires.

La matrice  $Z$  est ensuite soumise à une décomposition en valeurs singulières, donnant lieu à la formule :

$$Z = \sum_{i \geq 1} \sqrt{\lambda_i} \nu_i u_i^T$$

où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $Z^T Z$ ,  $\nu_i$  les vecteurs propres correspondants de  $Z Z^T$ , et  $u_i$  les vecteurs propres de  $Z^T Z$  associés à  $\lambda_i$ . Il est important de noter que si  $u_i$  est un vecteur propre de  $Z^T Z$ , alors  $Z u_i$  est un vecteur propre de  $Z Z^T$  associé à la même valeur propre  $\lambda_i$ . Ainsi,  $Z^T Z$  et  $Z Z^T$  partagent les mêmes valeurs propres.

Si nous définissons  $\nu_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z u_i$ , alors  $u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z^T \nu_i$  et  $Z u_i u_i^T = \sqrt{\lambda_i} \nu_i \nu_i^T$ . Les vecteurs  $u_i$  étant orthogonaux et normalisés, en sommant, on obtient l'approximation souhaitée de  $Z$ .

En supposant que la plus grande valeur propre  $\lambda_1$  est significativement plus grande que les autres, on peut approximer  $Z$  par :

$$Z \approx \sqrt{\lambda_1} \nu_1 u_1^T$$

Pour évaluer la qualité de cette approximation, on calcule le taux d'inertie  $\tau$ , défini comme :

$$\tau = \frac{\lambda_1}{\sum_{i \geq 1} \lambda_i}$$

Finalement, les estimateurs  $\hat{\beta}$  et  $\hat{k}$  sont dérivés comme suit :

$$\hat{\beta} = \frac{\nu_1}{\sum_j \nu_{1j}} \quad \text{et} \quad \hat{k} = \sqrt{\lambda_1} u_1$$

Cette approche permet une estimation efficace des paramètres  $\beta_x$  et  $k_t$ , en capturant la structure sous-jacente des taux de mortalité à travers le temps et par âge.

Malgré son utilisation répandue pour la prévision des taux de mortalité, le modèle de Lee Carter présente des limites notables. Une contrainte majeure est que les coefficients  $\beta_x$ , sensibles à l'âge, sont considérés comme constants dans le temps, ne capturant pas l'impact potentiellement variable des avancées technologiques ou médicales sur différentes tranches d'âge au fil des années. En outre, l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs, supposant une variance constante des taux de mortalité, est remise en question, particulièrement aux âges avancés où la variabilité des taux de décès augmente. Cette hausse de volatilité n'est pas bien représentée par le modèle, ce qui peut conduire à des estimations moins précises pour les tranches d'âge élevées.

Face à ces limitations, le modèle de Log-Poisson a été proposé comme une alternative permettant une modélisation plus flexible de la variance des taux de mortalité, en tenant compte de leur hétérogénéité par âge et par période.

### 3.1.3 Modèle Log-Poisson

Le modèle Log-Poisson, développé par Brouhns, Denuit et Vermunt en 2002, apporte une réponse significative à l'une des limites clés du modèle de Lee-Carter, à savoir l'hypothèse d'homoscédasticité des taux de mortalité. Ce modèle se distingue par sa capacité à modéliser directement le nombre de décès observés sans nécessiter l'hypothèse d'une variance constante des taux de mortalité à travers les âges et le temps.

Dans ce modèle, le nombre de décès  $D_{xt}$  à l'âge  $x$  durant l'année  $t$  est supposé suivre une distribution de Poisson avec le paramètre  $E_{xt} \mu_{xt}$ , où  $E_{xt}$  représente l'exposition au risque

à l'âge  $x$  et à l'année  $t$ , et  $\mu_{xt}$  est le taux de mortalité instantané. La relation est exprimée comme suit :

$$D_{xt} \sim \mathcal{P}(E_{xt}\mu_{xt})$$

où le taux de mortalité instantané  $\mu_{xt}$  est modélisé par l'exponentielle des paramètres du modèle, de manière similaire au modèle de Lee-Carter :

$$\mu_{xt} = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)$$

L'interprétation des paramètres  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  et  $k_t$  reste la même que dans le modèle de Lee-Carter, où  $\alpha_x$  capte le niveau log-moyen de mortalité pour l'âge  $x$ ,  $\beta_x$  décrit la sensibilité de la mortalité à l'âge  $x$  envers les variations temporelles, et  $k_t$  représente le facteur temporel commun.

Toutefois, comme le modèle de Lee-Carter, le modèle Log-Poisson doit également gérer les problèmes d'identifiabilité. Pour ce faire, les mêmes types de contraintes sont appliqués : la somme des  $\beta_x$  est fixée à 1 et la somme des  $k_t$  à 0, pour assurer l'unicité de la solution.

### 3.1.3.1 Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ , et  $k_t$  se fait par le biais de l'estimateur du maximum de vraisemblance. La fonction de log-vraisemblance à maximiser est donnée par :

$$\ln L(\alpha, \beta, k) = \sum_{x,t} (D_{xt}(\alpha_x + \beta_x k_t) - E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x k_t))$$

Pour trouver les valeurs des paramètres qui maximisent cette fonction de log-vraisemblance, l'algorithme de Newton-Raphson est souvent utilisé en raison de sa capacité à converger rapidement vers une solution numérique. Cet algorithme repose sur l'itération suivante pour chaque paramètre :

- Pour  $\alpha_x$  :

$$\hat{\alpha}_x^{(i+1)} = \hat{\alpha}_x^{(i)} - \frac{\sum_{t=t_m}^{t_M} (D_{xt} - E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(i)} + \hat{\beta}_x^{(i)} \hat{k}_t^{(i)}))}{\sum_{t=t_m}^{t_M} E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(i)} + \hat{\beta}_x^{(i)} \hat{k}_t^{(i)})}$$

- Pour  $\beta_x$  et  $k_t$ , des mises à jour similaires sont appliquées, tenant compte de la spécificité de chaque paramètre et de leur rôle dans le modèle.

$$\hat{\beta}_x^{(k+1)} = \hat{\beta}_x^{(k)} - \frac{\sum_{t=1}^{t_m} (D_{x,t} - E_{xt} \exp(\alpha_x^{(k+1)} + \beta_x^{(k)} \kappa_t^{(k)})) \kappa_t^{(k+1)}}{\sum_{t=t_m}^{t_m} E_{xt} (\alpha_x^{(k+1)} + \beta_x^{(k)} \kappa_t^{(k+1)})^2 (\kappa_t^{(k+1)})^2}$$

$$\kappa_t^{(k+1)} = \kappa_t^{(k)} - \frac{\sum_{x=t_1}^{t_m} (D_{x,t} - ETR_t [\exp(\alpha_x^{(k+1)} + \beta_x^{(k)} \kappa_t^{(k)})]) \beta_x^{(k)}}{\sum_{x=x_1}^{x_n} ETR_t \left( (\alpha_x^{(k+1)} + \beta_x^{(k)} \kappa_t^{(k)})^2 \right) (\beta_x^{(k)})^2}$$

La valeur initiale de  $\beta_x$  est fixée à 0, tandis que les valeurs initiales pour les autres paramètres peuvent être choisies librement. Après convergence de l'algorithme, les paramètres ajustés sont obtenus et peuvent être normalisés pour assurer l'identifiabilité du modèle :

- $k_t$  final est ajusté pour que la moyenne de  $k_t$  sur la période soit égale à 0.
- $\beta_x$  final est ajusté de sorte que la somme des  $\beta_x$  sur tous les âges soit égale à 1.
- $\alpha_x$  final est ajusté en fonction de la moyenne de  $k_t$  et de la somme des  $\beta_x$ .

Ces ajustements finaux garantissent que les paramètres du modèle Log-Poisson restent interprétables et cohérents avec les contraintes d'identifiabilité du modèle.

### 3.1.4 Choix du modèle

Lorsqu'on a terminé d'ajuster un modèle statistique, il est essentiel de vérifier sa pertinence à travers divers tests statistiques traditionnels. Ces tests aident à confirmer que les taux ajustés ne divergent pas significativement des taux initiaux. Cependant, dans certains cas spécifiques, comme lors de l'élaboration de tables de mortalité basées sur les expériences, il peut être prudent d'opter pour des taux ajustés intentionnellement différents des taux bruts. Par exemple, il peut être judicieux d'augmenter les taux pour certains types de contrats d'assurance-vie. Dans de telles circonstances, il est nécessaire d'adapter les méthodes statistiques utilisées, en privilégiant les tests unilatéraux qui sont plus appropriés pour évaluer ce type de modifications.

La sélection du modèle de mortalité le plus adapté parmi ceux testés, s'avère cruciale. Cette approche, servant également à la validation des résultats, permet de comparer le nombre de décès observés avec le nombre théorique de décès prévu par les modèles. Ces critères fournissent une indication précieuse sur la concordance entre les données réelles et les prédictions du modèle. Voici un aperçu des principaux critères de proximité utilisés dans cette étude :

#### 3.1.4.1 SMR (Standardized Mortality Ratio)

Le SMR est défini comme le rapport entre le nombre total observé de décès et le nombre total attendu de décès, avec

$$\text{SMR} = \frac{\sum_{xt} D_{xt}}{\sum_{xt} E_{xt} \hat{q}_{xt}}$$

Un SMR supérieur à 1 indique une sur-estimation des décès par le modèle, tandis qu'un SMR inférieur à 1 suggère une sous-estimation.

Ce critère peut être affiné en le calculant annuellement ou par tranches d'âge pour évaluer plus précisément la qualité de la modélisation.

### 3.1.4.2 MAPE (Mean Absolute Percentage Error)

Le MAPE quantifie l'erreur moyenne absolue entre les taux de mortalité observés et ceux prédits par le modèle, exprimée en pourcentage. Il est calculé par

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{\hat{q}_{xt} - q_{xt}}{\hat{q}_{xt}} \right| \times 100$$

, où  $n$  est le nombre total d'observations. Plus le MAPE est faible, plus le modèle est jugé adéquat pour représenter les données de mortalité.

### 3.1.4.3 Test du Chi - deux

Il s'agit d'un indicateur calculant la somme des carrés des écarts entre les taux bruts et les taux du modèle, pondérée par les expositions. Plus la valeur de la statistique de test  $\chi^2$  est faible, plus la qualité de l'ajustement est bonne. La statistique de test du  $\chi^2$  s'écrit comme suit :

$$\chi^2 = \sum_x \sum_t \frac{(D_{xt} - E_{xt}\hat{q}_{x,t})^2}{E_{xt}\hat{q}_{x,t}(1 - \hat{q}_{x,t})}$$

## 3.2 Application aux données

### 3.2.1 Espérance de vie par cohorte

Considérons les éléments suivants dans le contexte de l'analyse actuarielle :

1. **Temps de Vie Restant** ( $T_x(t)$ ) : C'est la durée de vie restante prévue pour une personne âgée de  $x$  ans à son dernier anniversaire, calculée au moment  $t$ .

2. **Taux de Survie** ( ${}_{\tau}p_x(t)$ ) : Il représente la probabilité qu'une personne âgée de  $x$  ans au temps  $t$  survive pendant encore  $\tau$  années. Ce taux est défini par la formule :

$${}_{\tau}p_x(t) = \exp\left(-\int_0^{\tau} \mu_{x+s}(s) ds\right),$$

où  $\mu_{x+s}(s)$  est le taux de mortalité à l'âge  $x + s$  au moment  $s$ .

3. **Processus de Mortalité** ( $\mu_x(t)$ ) : Il s'agit d'une mesure qui varie avec le temps et l'âge, décrivant le risque de décès pour les individus d'un certain âge à un certain moment.

4. **Espérance de Vie de la Cohorte** ( $e_{x,g}^c(t)$ ) : C'est le nombre moyen d'années restantes de vie pour les individus d'âge  $x$  dans une population spécifique  $g$ , au temps  $t$ . Cette espérance de vie est calculée en tenant compte de la mortalité à chaque âge à partir de  $x$ , et elle est exprimée par la formule :

$$e_{x,g}^c(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\omega-x} \exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1} \mu_{x+j,g}(t+j)\right),$$

où le terme  $\frac{1}{2}$  est ajouté pour prendre en compte l'année fractionnaire et  $\omega$  désigne l'âge maximal envisagé.

L'espérance de vie de la cohorte pour un individu de  $x$  ans est calculée en additionnant les probabilités de survie annuelles (ajustées pour la mortalité à chaque âge), en commençant par l'âge actuel  $x$  jusqu'à l'âge maximal  $\omega$ . Cela fournit une mesure de la durée moyenne de vie restante pour les individus dans le contexte de la mortalité spécifique à leur population et à leur temps.

### 3.2.2 Modélisation de l'espérance de vie

#### 3.2.2.1 Les Données

Les ensembles de données exploités dans cette étude portent sur la mortalité en **Belgique**. Ces données, issues de la **Human Mortality Database (2023)**, incluent les décomptes de décès observés ( $D_{x,t}$ ) et les expositions au risque ( $E_{x,t}$ ). Les données sont segmentées par âge au décès ( $x = 0, \dots, 110+$ ), année de décès ( $t = 1981, \dots, 2023$ ), et sexe. Pour les besoins de cette analyse, nous utilisons une table de mortalité unisexe.

#### 3.2.2.2 Modèle stochastique de mortalité

#### 3.2.2.3 Modèle de Lee-Carter contre Modèle Lee-Carter Poisson

Les estimations des vecteurs  $\alpha_x$  et  $\beta_x$  associées à nos données sont représentées sur les figures suivantes :

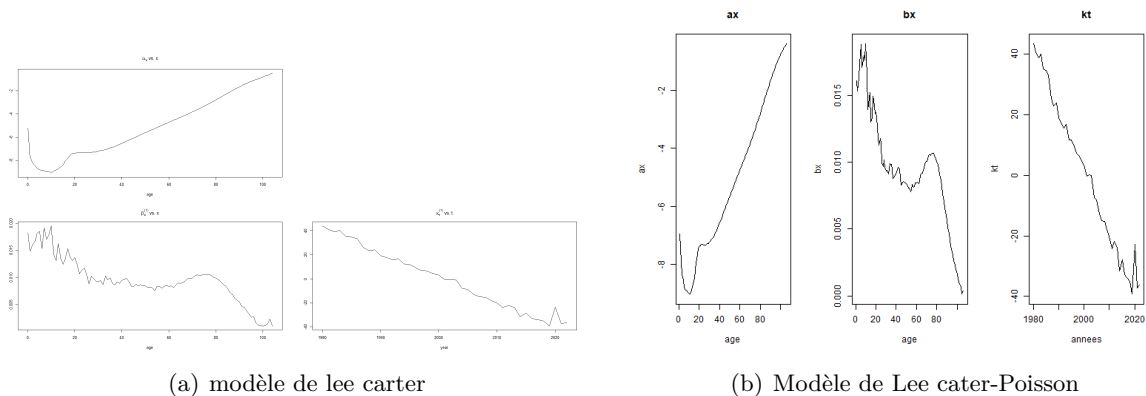


FIGURE 3.2.1 – Modèle stochastique de mortalité

#### 3.2.2.4 sélection du modèle : Résultat des critères de proximités

Pour sélectionner le modèle le plus adapté à nos données, nous les avons soumis à divers critères de proximité. Les résultats obtenus sont les suivants :

	SMR	MAPE	$\chi^2$
Lee-Carter	0.999234	0.08445	0.453
Log Poisson	1.001210	0.06358	0.315

TABLE 3.2.1 – Comparaison des performances des modèles

Les méthodes d'analyse de proximité appliquées pour l'évaluation comparative des modèles statistiques indiquent une supériorité du modèle Log-Poisson sur le modèle de Lee-Carter dans le contexte de notre étude. Le modèle Log-Poisson démontre une meilleure adéquation aux données.

### 3.2.2.5 Prédiction des $k_t$

Après avoir sélectionné le modèle Lee-Carter-Poisson adapté à nos données, nous avons extrait la série temporelle des  $k_t$ , qui capte les tendances temporelles de la mortalité. Pour projeter les taux de mortalité futurs et la population à long terme, comme à l'horizon 2124, nous avons utilisé le modèle ARIMA(p,d,q), couramment appliqué aux processus influencés par des chocs aléatoires.

L'estimation par un modèle ARIMA requiert une série stationnaire, impliquant une moyenne et une variance constantes. Nous avons supposé que  $\kappa_{t+1} = \kappa_t + d + \epsilon_t$ , avec  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ , ce qui implique que  $\mathbb{E}(\kappa_{t_n+1}) = \kappa_{t_n} + kd$  et  $\mathbb{V}(\kappa_{t_n+1}) = k\sigma^2$ .

Les paramètres  $d$  et  $\sigma^2$  ont été estimés en maximisant la log-vraisemblance, obtenant  $\hat{d} = -1.89817$  et  $\hat{\sigma}^2 = 18.3112$ , cohérents avec un processus décroissant de  $\kappa_t$ . En utilisant ces paramètres, nous avons simulé 2 000 trajectoires de  $\kappa_t$  sur un horizon de 100 ans pour prédire les évolutions futures et estimer la tendance centrale. Après plusieurs essais, le modèle ARIMA(0,2,1) s'est avéré le plus adapté à la moyenne de nos données (voir anexe).

### 3.2.2.6 Projection de l'espérance de vie

En utilisant les valeurs projetées des paramètres  $k_t$ , nous sommes en mesure d'estimer les taux de mortalité instantanés futurs. Ces estimations sont cruciales pour la création de tables de mortalité prospectives, qui peuvent être soit transversales, couvrant une année donnée, soit générationnelles, suivant différentes cohortes sur le temps. Ces tables de mortalité nous permettent de calculer des probabilités de survie pour des périodes futures spécifiques ainsi que des espérances de vie résiduelles.

Grâce à ces outils, nous pouvons estimer les espérances de vie<sup>1</sup> pour différents âges avec une grande précision.

Âge	2023	2024	2025	2026
25	56.55	56.69	56.87	57.02
40	42.00	42.14	42.31	42.46
50	50.70	50.84	51.02	51.17
65	19.34	19.45	19.60	19.73
70	14.36	14.45	14.56	14.65

TABLE 3.2.2 – Espérance de vie projetée pour différents âges de 2023 à 2026

1. pour la table sur 20 ans, voir annexe 1 6.1.1

## Chapitre 4

# Application des Mécanismes d'Ajustement Automatique (MAA) et Analyse comparative

Nous allons, dans ce chapitre, construire un modèle de régime de retraite global à prestation définie qui s'appliquera à tous les affiliés, cotisants et retraités, depuis leur entrée dans le régime, ce qui implique que le régime est en plein fonctionnement. Cette approche permet d'examiner l'impact des mécanismes d'ajustements automatiques sans nécessiter de modifications du régime lui-même, en se concentrant exclusivement sur les mécanismes.

Pour analyser l'impact de chaque mécanisme, nous réaliserons une série d'analyses de sensibilité sur certains paramètres du régime. Ces tests mettront en lumière les effets de divers ajustements sur l'évolution du régime. Les mécanismes d'ajustement envisagés incluent : l'ajustement des taux de contributions, où les taux pourraient être ajustés en fonction de l'évolution démographique et économique pour garantir un financement adéquat du régime. L'ajustement de l'âge de la retraite tout en maintenant le taux de remplacement cible constant permettrait d'équilibrer les périodes de cotisation et de prestation et de réduire la pression financière sur le régime. Nous envisagerons également d'ajuster l'âge de la retraite tout en améliorant l'adéquation des pensions pour s'assurer que les pensions restent suffisantes. Enfin, nous évaluerons la modification des pensions d'entrée par le biais d'un facteur de durabilité, ajustant les nouvelles pensions pour refléter les changements démographiques et économiques, assurant ainsi la viabilité à long terme du régime.

Les critères d'évaluation de cette analyse comparative seront centrés sur la solvabilité du régime, l'équité intergénérationnelle et l'adéquation des prestations. La solvabilité sera mesurée par la capacité du régime à honorer ses engagements financiers à long terme. L'équité intergénérationnelle évaluera si les ajustements répartissent équitablement les charges et les bénéfices entre les différentes générations. L'adéquation des prestations jugera de la capacité du régime à fournir des revenus de retraite suffisants pour maintenir le niveau de vie des retraités.

L'analyse comparative des différents mécanismes d'ajustement sera basée sur des simulations

à long terme, couvrant une période de 100 ans (de 2023 à 2123). Les résultats permettront d'identifier les mécanismes les plus efficaces pour maintenir la solvabilité du régime, tout en assurant l'équité intergénérationnelle et l'adéquation des prestations.

## 4.1 Modélisation d'un Régime de Retraite à Prestations Définies

La mise en place d'un système de retraite par répartition est une entreprise complexe nécessitant une planification minutieuse et une coordination rigoureuse entre les différentes parties prenantes. Un tel système repose sur le principe de la solidarité intergénérationnelle, où les cotisations des travailleurs actifs financent les pensions des retraités actuels. Nous allons définir les hypothèses clés pour initier un système de retraite par répartition.

### 4.1.1 Hypothèse sur les paramètres de base

#### 4.1.1.1 Hypothèse sur la Population

Nous analysons la population à une date initiale  $t_0$  en utilisant  $L(x, t_0)$ , qui représente le nombre de personnes âgées de  $x$  ans à  $t_0$ . Dans ce modèle, nous excluons les flux migratoires, considérant que les nouvelles entrées proviennent uniquement des naissances. Cette simplification permet de se concentrer sur les évolutions de la population active et retraitée.

La population étudiée vieillit selon les taux de mortalité prospectifs  $q(x, t)$ , projetés avec le modèle de Lee-Carter adapté à une distribution de Poisson. L'évolution démographique est modélisée par l'ajout du solde naturel (naissances moins décès), en intégrant les effets du vieillissement et des fluctuations démographiques naturelles.

Nous utilisons les données  $L(x, 2023)$  de la table de mortalité périodique unisexe de la Belgique, fournies par la Human Mortality Database (HMD). La population est projetée jusqu'à 2123 en utilisant les taux de mortalité  $q(x, t)$  pour les âges de 0 à 105 ans. Il y a pas d'entrée par naissance, ce qui implique que  $L(0, t)$  reste constant à 100 000.

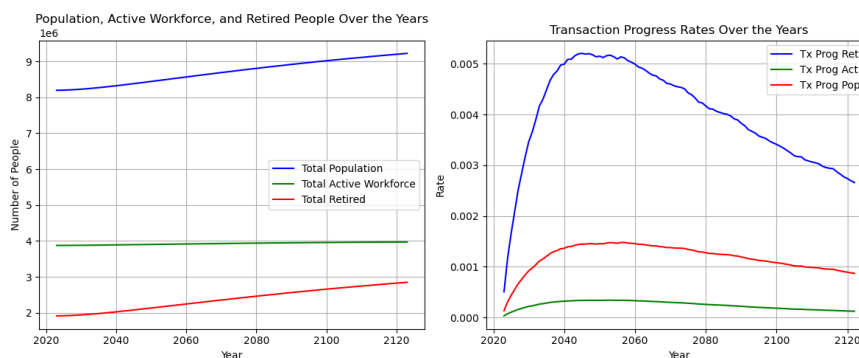


FIGURE 4.1.1 – Évolution de la population au fil du temps

Les graphiques présentés illustrent l'évolution de la population de base de notre régime de retraite. La population active, âgée de 25 à 65 ans, montre une tendance à la hausse, alignée sur l'accroissement général de la population. Le nombre de retraités (65 ans et plus) augmente

chaque année, ce qui indique une proportion croissante de la population atteignant l'âge de la retraite. Cela reflète une augmentation de la longévité ou des générations plus nombreuses atteignant cet âge. Cette tendance est confirmée par les quotients de vieillesse (QV), qui montrent une nette progression au fil des années.

Année	2023	2033	2043	2053	2063	2073	2083	2093	2103	2113	2123
QV (%)	49.39	50.55	52.84	55.45	57.59	60.72	62.73	65.36	67.99	70.62	71.74

TABLE 4.1.1 – Quotient de Vieillesse (QV) de 2023 à 2123 tous les 10 ans

Le graphique 4.1.2 révèle que le taux de croissance du Quotient de vieillesse augmente rapidement et atteint son apogée en 2056, avant de diminuer et de tendre vers une stagnation. Cela suggère une stabilisation ou un recul de l'espérance de vie au fil du temps.

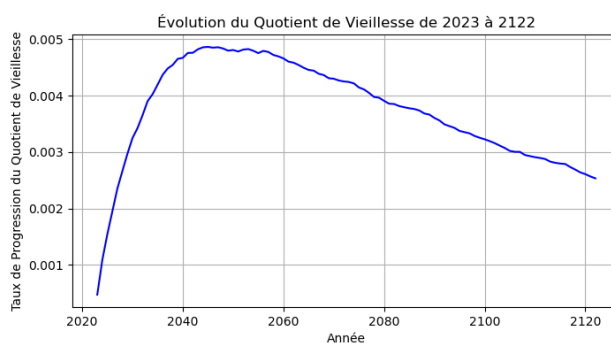


FIGURE 4.1.2 – Taux de Progression du Quotient de Vieillesse

À partir de ces données, les objectifs et les principes directeurs de notre système de retraite doivent être définis clairement. **L'objectif principal est d'assurer à la retraite a chaque travailleur un revenu minimum équivalent à 52% du salaire moyen réévalué depuis son entrée sur le marché du travail jusqu'à l'âge de retraite , garantissant ainsi à chaque retraité une sécurité financière de base.** En adoptant des principes tels que l'équité intergénérationnelle et la solidarité, le système doit veiller à ce que les contributions et les prestations soient justes pour toutes les générations. De plus, nous allons inclure une adaptabilité permettant d'ajuster les taux de cotisation, l'âge de la retraite et les prestations en réponse aux évolutions démographiques et économiques, afin de maintenir la viabilité et la durabilité du système.

#### 4.1.1.2 Hypothèse sur la revalorisation des droits de retraite

Dans ce modèle, nous supposons que chaque groupe d'affiliés d'âge  $x$  à un instant  $t$  perçoit un salaire identique, et que l'indexation des pensions se fait en fonction du salaire moyen brut. Il est crucial de définir à la fois les salaires moyens bruts futurs  $w(t)$  et les salaires moyens bruts par âge  $w(x, t)$ , car les prestations de pension dépendent de l'évolution des salaires des affiliés actifs.

Pour commencer, nous devons établir un salaire moyen brut initial  $w(t_0)$ . Ensuite, nous

appliquons un taux de croissance annuel attendu des salaires  $g_s(t)$  pour chaque année de projection, afin de déterminer les salaires moyens bruts futurs  $w(t)$ .

Nous élaborons ensuite un indice de répartition des salaires  $J(x, t)$ , spécifique à chaque âge  $x$  et période  $t$ .

$$J(x, t_0) = \frac{I(x, x_e)}{J(x_e, t_0)} \quad \text{et} \quad I(x, x_e) = 100 \times [(1 + j)^{(x-x_e)}]^{1.1}$$

où  $x$  est l'âge de l'individu variant de  $x_e$  à  $x_{r(t)}$ . l'indice de base étant  $J(25, 2023) = 100$ . L'indice de répartition  $J(x, t_0)$  est calculé en prenant la partie entière supérieure de  $(1+j)^{(x-x_e)}$ , ce qui signifie que nous arrondissons au nombre entier supérieur le plus proche.

Cet indice nous permet de décomposer les salaires moyens bruts futurs  $w(t)$  en salaires moyens par âge  $w(x, t)$ . Le calcul des salaires moyens pour chaque âge et chaque période de projection se fait ainsi : en 2023, nous fixons un salaire annuel moyen brut pour l'ensemble de la population active. En utilisant l'échelle des salaires par âge  $J(x, t_0)$ , nous répartissons ce salaire annuel moyen initial  $w(t_0)$  entre les différentes tranches d'âge.

Cette opération est répétée pour chaque période de projection 2024 à 2123, en prenant le salaire moyen indexé  $w(t)$  et en le répartisant selon l'indice  $J(x, t)$  pour obtenir les salaires moyens  $w(x, t)$  à chaque période. Cette méthodologie assure une estimation précise des salaires par âge, en tenant compte des évolutions salariales prévues au fil du temps.

Le taux de croissance annuel des salaires  $g_s(t)$  est appliqué pour réévaluer les salaires chaque année, reflétant l'évolution attendue des salaires dans l'économie (inflation). Ainsi, les salaires moyens par âge et par année sont calculés selon la formule

$$w(x, t) = w(t_0) \cdot J(x, t_0) \cdot (1 + g_s(t))^{t-t_0}$$

On prendra  $j = 2\%$  et  $g_s(t) = 1\%$

La valeur cumulative moyenne des revenus pensionnables  $V_t$  à l'âge de la retraite  $x_{r(t)}$  est déterminée en réévaluant les contributions annuelles depuis l'âge d'entrée sur le marché du travail  $x_e$  jusqu'à l'âge de la retraite  $x_{r(t)}$ . Voir (2.3.2).

Pour calculer les prestations de retraite de manière équitable et précise, nous déterminons le salaire moyen réévalué des travailleurs actifs au cours de leur vie professionnelle, notée  $\overline{RE}(x_{r(t)}, x_e, w_t, v_t)$ .

### Calcul des Revenus Totaux Réévalués

Les revenus totaux réévalués  $RE_{x_{r(t)}}$  sont obtenus en ajustant les salaires passés pour tenir compte de l'inflation et des augmentations de salaire. La formule est :

---

1. partie entière supérieur de  $(1 + j)^{(x-x_e)}$

$$RE_{x_{r(t)}} = w_t^{x_{r(t)}} + \sum_{x=x_e}^{x_{r(t)}-1} w_{t-(x_{r(t)}-x)}^{x_{r(t)}} \prod_{j=t-(x_{r(t)}-x)+1}^t (1 + v_j)$$

où  $w_t^{x_{r(t)}}$  est le salaire à l'année de la retraite,  $w_{t-(x_{r(t)}-x)}^{x_{r(t)}}$  est le salaire à une année passée, ajusté à l'année de la retraite,  $v_j$  est le taux d'inflation ou d'augmentation des salaires pour l'année  $j$ ,  $\prod_{j=t-(x_{r(t)}-x)+1}^t (1 + v_j)$  est produit des taux d'inflation ou d'augmentation des salaires de l'année  $t - (x_{r(t)} - x) + 1$  à l'année  $t$ .

Cette formule ajuste les salaires passés en fonction de l'inflation et des augmentations de salaire pour obtenir une estimation des revenus réévalués à l'année de la retraite.

Le salaire moyen réévalué,  $\overline{RE}(x_{r(t)}, x_e, w_t, v_t)$ , est calculé en divisant les revenus totaux réévalués par le nombre d'années de travail :

$$\overline{RE}(x_{r(t)}, x_e, w_t, v_t) = \frac{RE_{x_{r(t)}}}{x_{r(t)} - x_e}$$

Cette méthode permet d'obtenir une évaluation précise et équitable des prestations de retraite en tenant compte des variations des salaires et de l'inflation sur toute la durée de la carrière professionnelle.

### Calcul des prestations

Chaque actif ayant cotisé pendant 40 ans recevra une pension correspondant à 52% de son salaire moyen réévalué. Notre régime de retraite à prestations définies (PD) garanti des prestations fixes aux retraités, basées sur une formule prédéterminée :

$$P_{x_r(t)} = \theta_t (x_{r(t)} - x_e) \cdot \overline{RE}_{x_r(t)} \cdot SF_{x_r(t)} \cdot b_{x_r(t)}$$

Le coefficient d'ajustement ( $\theta_t$ ) représente l'augmentation annuelle des droits à pension, influencé par les politiques des régimes de retraite et les conditions économiques. Une période de cotisation plus longue ( $x_{r(t)} - x_e$ ) entraîne une pension ajustée plus élevée, avec une base de 40 ans de cotisation.

La figure 4.1.3 montre l'évolution de la pension dite de base ( sans tenir compte de coefficient de l'espérance de vie) par rapport à celle ajustée par le coefficient de vie. Cette différence croissante souligne l'impact des ajustements sur les prestations reçues par les retraités. Les résultats montrent que les pensions de base augmentent régulièrement, en raison de facteurs économiques comme l'inflation et les ajustements salariaux. En revanche, les pensions ajustées augmentent à un rythme plus lent, car elles sont réduites par un coefficient d'espérance de vie.

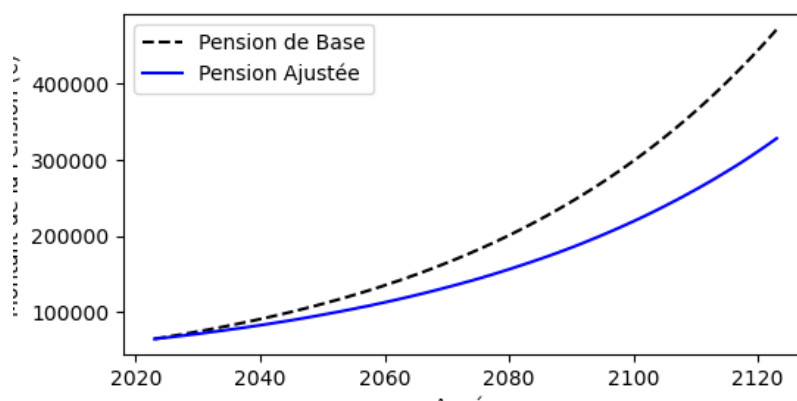


FIGURE 4.1.3 – Évolution de la Pension de Base et de la Pension Ajustée

#### 4.1.2 Évaluation de la Solvabilité du régime

La solvabilité, également appelée soutenabilité financière, d'un régime de retraite désigne sa capacité à respecter ses obligations futures sans avoir besoin d'augmenter les taux de cotisation. Trois leviers principaux peuvent garantir la solvabilité d'un régime de retraite financé par répartition, qui peut être utilisé de manière complémentaire : l'amélioration des prestations de pension, l'augmentation des taux de cotisation et le rehaussement de l'âge de la retraite.

L'évaluation de la solvabilité d'un régime de retraite par répartition se base sur la différence entre la valeur actuelle des cotisations et la valeur actuelle des prestations. Cette différence est un indicateur clé de la capacité du régime à financer ses engagements futurs. Formellement, la solvabilité est évaluée comme suit :

$$\text{Solvabilité} = \text{Valeur actuelle des cotisations} - \text{Valeur actuelle des prestations}$$

Une différence positive indique une solvabilité adéquate, tandis qu'une différence négative signale un besoin d'ajustements.

##### 4.1.2.1 Ratio de Solvabilité du Régime de Retraite en $t$

Le ratio de solvabilité d'un régime de retraite par répartition à un instant donné, noté  $t$ , est un indicateur qui mesure la capacité du régime à couvrir ses engagements financiers à court terme avec les ressources disponibles. Ce ratio compare la valeur actuelle des cotisations futures à la valeur actuelle des prestations futures.

Le ratio de solvabilité est défini comme le rapport entre la valeur actuelle des cotisations futures (VAC) et la valeur actuelle des prestations futures (VAP).

$$\text{Ratio de solvabilité en } t = \frac{\text{Valeur actuelle des cotisations futures (VAC)}}{\text{Valeur actuelle des prestations futures (VAP)}}$$

où la Valeur actuelle des cotisations futures (VAC) :

$$\text{VAC} = \sum_{t=0}^n \frac{C_t}{(1 + y_t)^t}$$

et la Valeur actuelle des cotisations futures (VAP) :

$$\text{VAP} = \sum_{t=0}^n \frac{P_t}{(1 + y_t)^t}$$

avec  $C_t$  est Montant des cotisations à l'année  $t$ ,  $y_t$  est taux d'actualisation,  $n$  est Nombre d'années projetées et  $P_t$  le Montant des prestations à l'année  $t$

- . **Ratio supérieur à 1** : Le régime est solvable. Cela signifie que la valeur actuelle des cotisations futures excède la valeur actuelle des prestations futures, indiquant que le régime peut couvrir ses engagements futurs.
- . **Ratio égal à 1** : Le régime est à l'équilibre. Les cotisations futures suffisent exactement à couvrir les prestations futures.
- . **Ratio inférieur à 1** : Le régime est insolvable. La valeur actuelle des prestations futures excède la valeur actuelle des cotisations futures, ce qui suggère un déficit nécessitant des ajustements.

## 4.2 Applications des mécanismes d'ajustements automatiques

Dans le chapitre 2, nous avons étudié la structure de chaque mécanisme d'ajustement. Dans cette section, nous appliquons ces mécanismes à notre régime de pension retraite.

Pour La mise en place de notre système de retraite financé par répartition sans aucune source de financement externe à la date initiale  $t_0 = 2023$ , nous avons besoin de définir des paramètres de bases.

Période d'étude	2023-2123
Taux d'emploi	100%
Âge d'entrée dans le système	25 ans
Âge effectif de la retraite	65 ans
Taux de revalorisation des pensions ( $\pi_t$ )	0
Taux d'actualisation ( $y_t$ )	2%
Taux d'accumulation ( $\theta_t$ )	1.3%
Taux de revalorisation des salaires ( $v_t$ )	2%
coefficient ( $b_{x_{r(t)}}$ )	1

La génération 2023 sert de référence pour calculer les paramètres fondamentaux du régime de retraite. Cette génération est constituée de **3,876,040** actifs et de **1,824,287** retraités, avec un quotient de vieillesse de **0.47065**. Le régime promet à chaque retraité une pension avec un taux de remplacement de 52%. Le taux de cotisation appliqué aux actifs de la génération 2023 est de 0.2447 (24.47%).

Pour les projections, nous supposons que le taux de cotisation ( $c_0$ ) reste constant. Les quotients de vieillesse augmentent à chaque génération (voir 4.1.1). Cette progression implique que les taux de cotisation nécessaires pour équilibrer le système (prestations = cotisations) augmentent significativement pour chaque génération. L'augmentation progressive du quotient de vieillesse, sans modification du taux de cotisation, entraîne un déséquilibre croissant entre les cotisations perçues et les prestations versées.

Le ratio de solvabilité diminue de manière significative, passant de 1 pour la génération 2023 à environ 0,9515 pour la génération 3. Ce déclin indique une insuffisance croissante des cotisations pour couvrir les prestations. La différence entre les cotisations et les prestations passe d'un léger déficit en 2023 à des déficits substantiels pour les générations suivantes, signalant une pression financière accrue sur le régime. Si cette tendance se poursuivait, le régime pourrait devenir insolvable, nécessitant des ajustements majeurs pour assurer sa viabilité à long terme.

Pour maintenir la viabilité financière du régime face à l'augmentation des quotients de vieillesse, plusieurs stratégies peuvent être envisagées. Une augmentation progressive du taux de cotisation pourrait équilibrer les recettes et les dépenses, même avec une population de retraités en hausse. Ajuster le taux de remplacement à la baisse réduirait les prestations versées et aiderait à rétablir l'équilibre financier. Enfin, retarder l'âge de la retraite prolongerait la période de cotisation et réduirait la durée pendant laquelle les pensions sont versées.

pour la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

- SB : scénario de base
- $NS_1$  : Nouveau scénario 1 pour le premier stress
- $NS_2$  : Nouveau scénario 2 pour le premier stress
- AAAM : Avec mécanisme d'ajustement automatique
- SAAM : Sans mécanisme d'ajustement automatique

#### 4.2.1 Ajustement du taux de cotisation

L'analyse détaillée des taux de cotisation 2.3.7 met en lumière les défis auxquels sont confrontés les systèmes de retraite par répartition. Les ajustements constants et les réformes sont essentiels pour assurer la durabilité du système, tout en tenant compte des impacts économiques et sociaux sur les différentes générations.

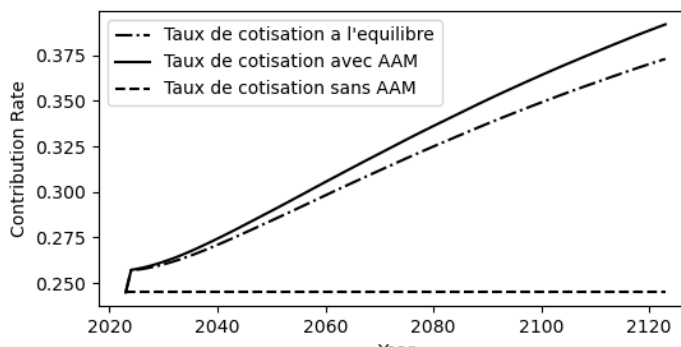


FIGURE 4.2.1 – Évolution des taux de cotisation (2023-2123)

L'analyse des taux de cotisation, comme illustré dans le graphique 4.2.1, révèle des différences significatives entre les scénarios avec et sans mécanismes d'ajustements automatiques (MAA). Le taux de cotisation d'équilibre progresse régulièrement de 0.2447 en 2023 à environ 0.3731 en 2123, représentant une augmentation de 52,43%. Cette augmentation reflète la pression croissante exercée sur le système de retraite pour financer les pensions en raison de l'augmentation du quotient de vieillesse.

Dans un scénario sans ajustements automatiques, le taux de cotisation  $c_0$  reste fixe à 0.2447 tout au long de la période, ce qui est irréaliste du point de vue actuariel. Ce maintien du taux fixe conduit inévitablement à des déficits financiers importants, car les cotisations perçues deviennent insuffisantes pour couvrir les prestations versées. Ce déséquilibre entraîne un risque accru d'insolvabilité, menaçant la stabilité financière du régime de retraite à long terme. En revanche, avec des mécanismes d'ajustements automatiques, le taux de cotisation progresse de 0.2447 en 2023 à environ 0.3920 en 2123, soit une augmentation de 60,15%. Cette progression reflète une adaptation proactive aux besoins démographiques et économiques.

L'augmentation des taux de cotisation d'équilibre et avec MAA démontre l'importance de s'adapter aux pressions démographiques croissantes. Les ajustements automatiques permettent d'anticiper et de répondre de manière flexible aux variations des besoins de financement des pensions, assurant ainsi la viabilité financière du régime sur le long terme.

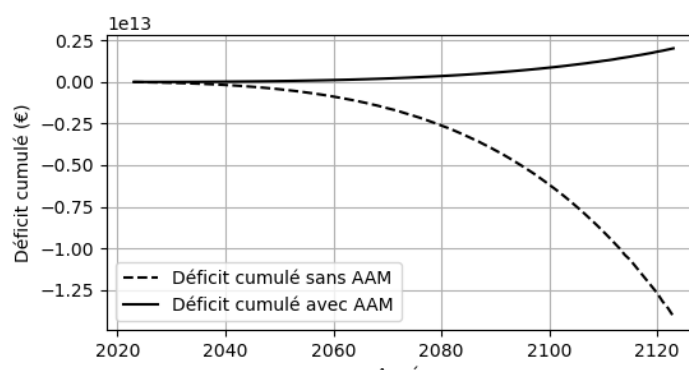


FIGURE 4.2.2 – Évolution du déficit cumulé de 2023-2123

L'analyse des déficits cumulés 4.2.2 pour le système de retraite révèle des différences notables entre les scénarios avec et sans mécanismes d'ajustements automatiques (MAA). Dans le scénario sans ajustements automatiques, le déficit cumulé croît de manière exponentielle, dépassant 1,4 trillion d'euros en 2123, soulignant l'impact dramatique de l'absence d'ajustements sur la viabilité financière du régime. Sans mécanismes pour augmenter les cotisations ou ajuster les prestations en fonction des besoins démographiques croissants, le régime accumule des déficits massifs, mettant en péril sa stabilité à long terme. En revanche, avec des ajustements automatiques, le déficit cumulé diminue beaucoup plus lentement, atteignant environ 2 trillions d'euros en 2123. Notamment, en 2023 et pour quelques années suivantes, il y a des excédents (déficits positifs) indiquant des gains pour le régime. L'ajustement automatique progressif du taux de cotisation, a été essentiel pour maintenir la viabilité financière à long terme du régime de retraite. Le taux de progression du déficit cumulé sans MAA est critique, tandis que le taux de progression avec MAA, bien que toujours en augmentation, reste sous contrôle.

L'analyse comparative des scénarios avec et sans MAA (voir 4.2.2) démontre l'importance cruciale des ajustements automatiques pour maintenir la rentabilité et la solvabilité financière du système de retraite. Sans ajustements, la rentabilité diminue, indiquant des déficits croissants et des pertes pour le régime. Avec des ajustements automatiques, la rentabilité s'améliore, montrant une gestion plus stable et durable des finances du régime.

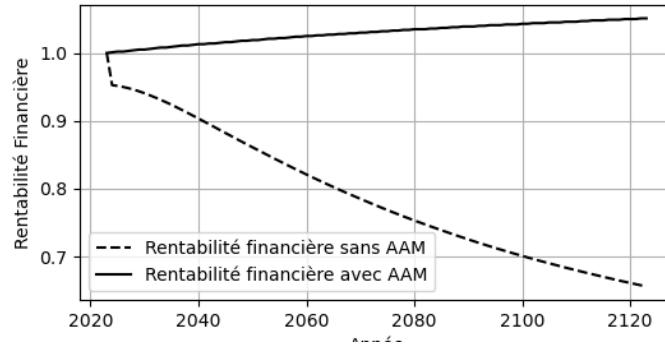


FIGURE 4.2.3 – Évolution de la rentabilité instantanée

## 4.2.2 Ajustement de l'âge de la Retraite tout en améliorant des pensions

La détermination du nouvel âge de la retraite à l'instant  $t$  passe par la résolution de l'équation implicite suivante :

$$e_{x_r}^C(t) = e_{x_r(0)}^C \cdot \frac{D_0}{D_t}$$

En d'autres termes, nous devons résoudre l'équation :  $\sum_{x=x_r}^{\omega-x_r} {}_t p_x = e_{x_r(0)}^C \cdot \frac{D_0}{D_t}$

où  $x_r$  est la valeur à déterminer. Nous cherchons à déterminer l'âge  $x_r$  à partir duquel la somme des probabilités de survie, de cet âge jusqu'à l'âge maximum  $\omega$ , égale un certain produit constant. Ce produit constant est l'espérance de vie initiale à la retraite ajustée par le ratio des facteurs de dépendance des personnes âgées aux temps initiaux et actuels.

### Méthode de résolution

Pour résoudre cette équation, nous utilisons la méthode d'interpolation linéaire<sup>2</sup>. Les valeurs de l'espérance de vie à tous les âges supérieurs à  $x_r(0)$  étant connues et projetées jusqu'en 2123, nous pouvons constituer le tableau suivant :

	2023	2024	2025
65	19.693	19.804	19.93
66	18.89	19.0017	19.135

TABLE 4.2.1 – espérance de vie à 65 et 66 entre 2023 et 2025

Pour des valeurs données de  $e_{x_r(0)}^C$ ,  $D_0$ , et  $D_t$ , nous allons déterminer le nouvel âge de la retraite pour les années 2024 et 2025.

Pour  $t = 2024$ , nous calculons  $e_{x_r(0)}^C \cdot \frac{D_0}{D_{2024}} = 19.6837$ . Pour déterminer l'âge de la retraite  $x_r$  tel que son espérance de vie soit égale à 19.6837, nous utilisons l'interpolation linéaire. Cette

2. qui probable car la fonction espérance de vie est monotone croissante entre deux âges

méthode nécessite d'identifier les âges  $x_{r_0}$  et  $x_{r_1}$  dont les espérances de vie  $e_{x_{r_0}}$  et  $e_{x_{r_1}}$  sont connues et encadrent la valeur 19.6837. Une fois ces âges identifiés, nous pouvons appliquer la formule d'interpolation linéaire pour estimer  $x_r$ .

La formule d'interpolation linéaire adaptée est la suivante :

$$19.6837 = e_{x_{r_0}} + \left( \frac{e_{x_{r_1}} - e_{x_{r_0}}}{x_{r_1} - x_{r_0}} \right) \cdot (x_r - x_{r_0})$$

En résolvant cette équation pour  $x_r$ , nous obtenons :

$$x_r = x_{r_0} + \left( \frac{19.6837 - e_{x_{r_0}}}{e_{x_{r_1}} - e_{x_{r_0}}} \right) \cdot (x_{r_1} - x_{r_0})$$

en remplaçant chaque inconnue par sa valeur, nous obtenons :

$$x_r = 65 + \left( \frac{19.6837 - 19.804}{19.0017 - 19.804} \right) \cdot (66 - 65) = 65.15$$

l'âge de la retraite en 2024 devra être de 65.15 ans. En appliquant l'interpolation linéaire sur l'ensemble des données, nous obtenons les  $x_r$  suivantes :

Année	2023	2030	2040	2050	2060	2070	2080	2090	2100
Age	65	66.32	68.58	70.77	72.80	74.55	76.11	77.49	78.67

TABLE 4.2.2 – Nouvel âge de retraite

La représentation 4.2.4 nous donne une vue d'ensemble de l'évolution de l'âge de la retraite entre 2023 et 2123. Ces courbes montrent comment les âges de retraite sont ajustés

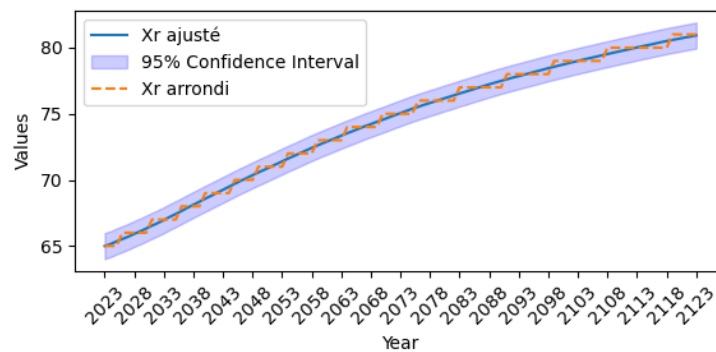


FIGURE 4.2.4 – Évolution des âges de retraites ajustés et arrondi avec IC à 95%

progressivement pour s'adapter aux évolutions de l'espérance de vie, tout en maintenant la cohérence et la stabilité des âges de retraite arrondis pour une mise en œuvre pratique.

#### 4.2.2.1 Nouvelle structure de la population étudiée

L'analyse de la structure de la population de 2023 à 2123 face ce nouveau scénario révèle une croissance continue de la population active, mais à un rythme plus modéré, passant de 3,876,040 à 5,488,815, soit une croissance de 41.6%. En revanche, la population retraitée connaît une baisse significative, passant de 1,824,287 en 2023 à 1,237,171 en 2123, soit un baisse de 32.18%.

Année	2023	2043	2063	2083	2103	2123
QV(%)	47.07	37.83	31.47	25.72	24.29	22.49

TABLE 4.2.3 – Quotient de vieillesse

Le quotient de vieillesse (QV), qui mesure le ratio entre le nombre de retraités et le nombre de personnes en âge de travailler, est passé de 0.4707 à 0.2249 sur la période étudiée. Cette baisse significative souligne l'effet positif du recul de l'âge de la retraite sur la structure de la population.

L'allongement de la période de cotisation a un impact significatif sur la viabilité du système de retraite. Il augmente le taux de remplacement et influence les calculs de  $V_t$  et  $\overline{RE}(x_{r(t)}, x_e, w_t, v_t)$ . Pour garantir la pérennité du régime, il est crucial de déterminer précisément le montant des pensions à verser.

Pour cela, il est essentiel de maintenir constants le taux de cotisation et les autres paramètres financiers au fil du temps. La dynamique des nouvelles pensions se formule ainsi :

$$P_{x_{r(t)}}^{ajusté} = \frac{c_0 \cdot V_t}{QV_t}$$

Cette équation calcule les pensions ajustées en fonction du taux de cotisation initial  $c_0$ , de la valeur cumulative moyenne des revenus  $V_t$ , et du quotient de vieillesse  $QV_t$ . Le but est de s'assurer que les pensions versées sont adéquates pour répondre aux besoins des retraités tout en garantissant la stabilité financière du système de retraite.

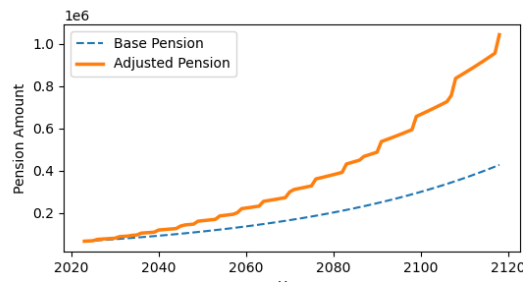


FIGURE 4.2.5 – Pension de base et pension ajusté

L'analyse de la figure 4.2.5 montrent que les pensions ajustées augmentent progressivement par rapport aux pensions de base en raison des ajustements automatiques. En début de période, la différence est négligeable, mais elle devient significative au fil du temps. Cela suggère que

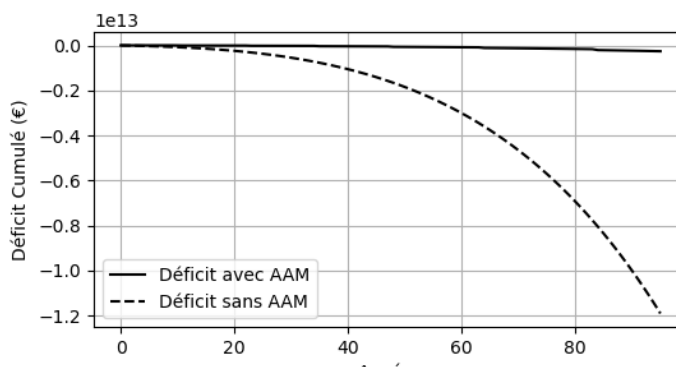


FIGURE 4.2.6 – Évolution du Déficit cumulé

l'augmentation de l'âge de la retraite et d'autres mécanismes d'ajustement jouent un rôle crucial dans l'amélioration des pensions à long terme.

L'analyse simultanée des déficits cumulés (fig4.2.6) et des ratios de solvabilité met en évidence des différences significatives dans la viabilité financière du système de retraite avec et sans ajustements automatiques (AAM). Avec AAM, les déficits cumulés restent stables jusqu'en 2033 avant d'augmenter progressivement pour atteindre environ 2,61 trillions d'euros en 2123. En comparaison, sans AAM, les déficits augmentent de manière exponentielle dès le début de la période, atteignant environ 119 trillions d'euros en 2123.

En termes de solvabilité, les ratios de solvabilité restent à 1 avec AAM jusqu'en 2033, indiquant une parfaite adéquation entre les cotisations et les prestations. Après 2033, le ratio diminue progressivement, atteignant 0,7531 en 2123. Sans AAM, le ratio de solvabilité chute rapidement, passant à 0,95 dès 2023 et atteignant 0,66 en 2123.

### 4.2.3 Ajustement de l'âge de la retraite tout en maintenant le taux de remplacement constant

Dans ce contexte, la détermination du nouvel âge de la retraite passe par la résolution de l'équation implicite :

$$\frac{e_{x_r}^c(t)}{(x_r(t) - x_e)} = \frac{D_0}{D_t} \cdot \frac{e_{x_r}^c(0)}{(x_r(0) - x_e)}$$

l'âge de la retraite est donc déterminé par interpolation linéaire comme faite à la section plus haut. et on obtient le tableau suivant :

Année	2023	2030	2040	2050	2060	2070	2080	2090	2100
Age	65	66.65	68.88	70.91	72.90	74.70	76.42	78.036	79.499

TABLE 4.2.4 – Nouvel age de retraite

l'évaluation du nouvel âge de la retraite 4.2.7, modifie la structure de la population, et nous calculons les Quotients de vieillesse (QV) Ce ratio passe de 47,07% à 20,49% sur la période d'étude. En maintenant le taux de remplacement constant, nous réévaluons le taux

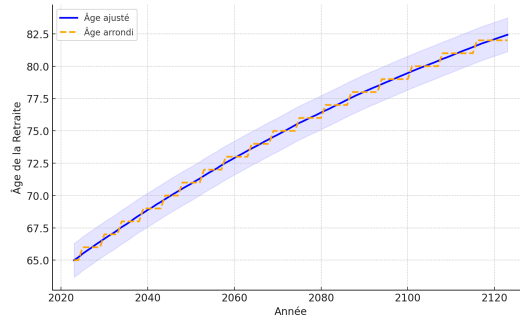


FIGURE 4.2.7 – Évolution de l'âge de la retraite

année	2023	2033	2043	2053	2063	2073	2083	2093	2103
QV	0.470	0.417	0.378	0.319	0.314	0.285	0.257	0.250	0.222

TABLE 4.2.5 – Évolution des Quotients de Vieillesse

d'accumulation, qui passe de 1,3% à 0,912%. Nous recalculons également la valeur de  $V_t$  en tenant compte des nouveaux âges de retraite et obtenons les pensions ajustées pour ce modèle selon la formule suivante :

$$P_{x_r(t)}^{ajusté} = \frac{c_0 \cdot V_t}{QV_t}$$

où  $P_{x_r(t)}^{ajusté}$  représente la pension ajustée à l'âge de retraite  $x_r(t)$ .

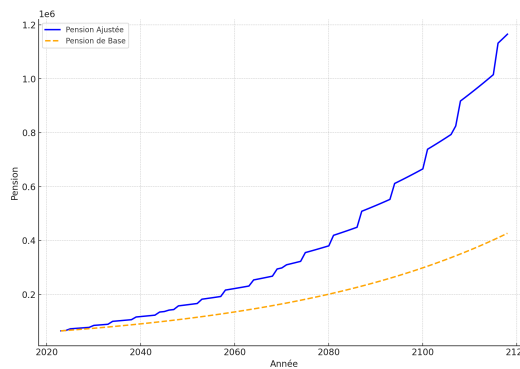


FIGURE 4.2.8 – pension de base et pension ajusté

L'évolution des pensions ajustées montre une croissance due à l'ajustement du taux d'accumulation et au recalcul de l'espérance de vie. Le quotient de vieillesse en baisse contribue également à cette augmentation pour maintenir un niveau de vie adéquat pour les retraités.

L'analyse de la figure 4.2.9 montre clairement que les ajustements automatiques des montants (AAM) permettent de limiter la croissance du déficit cumulé, mais ne suffisent pas à résoudre le problème de financement à long terme. Sans ces ajustements, le déficit cumulé

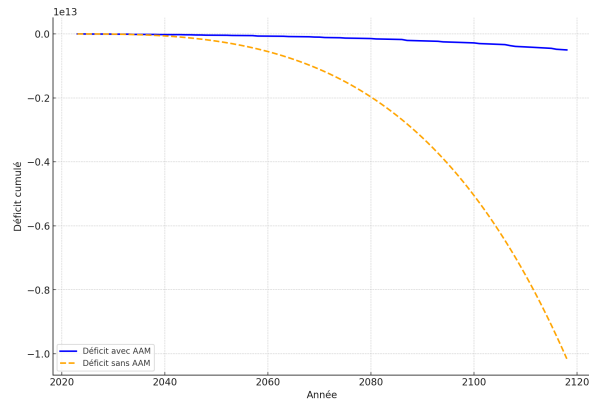


FIGURE 4.2.9 – Évolution des déficits cumulés

atteint des niveaux insoutenables, indiquant la nécessité de réformes structurelles et de mesures additionnelles pour assurer la viabilité financière du système de retraite à long terme.

#### 4.2.4 Ajustement de l'âge de la retraite tout en maintenant l'espérance de vie constant

Dans ce contexte, le nouvel âge de la retraite est déterminé par la résolution de l'équation implicite suivante :

$$e_{x_r}^c(t) = e_{x_r}^c(0)$$

En appliquant le même processus que celui des sections précédentes, nous pouvons calculer l'âge de la retraite. On obtient la figure suivante :

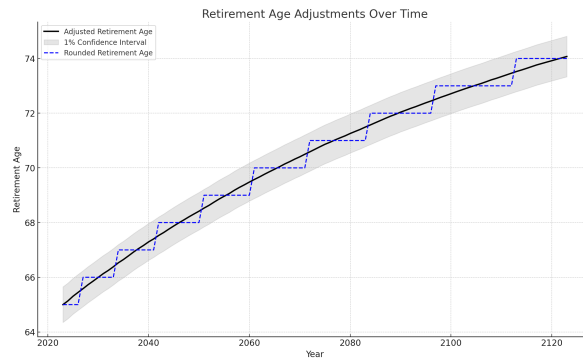


FIGURE 4.2.10 – Évolution de l'âge de la retraite

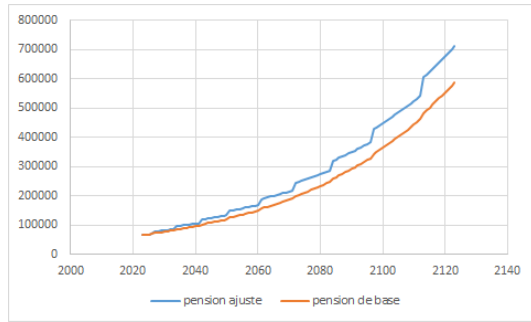
Comme dans les cas précédents, l'augmentation de l'âge de la retraite modifie la structure de la population étudiée.

Le quotient vieillesse montre une tendance générale à la baisse de 2023 à 2090, passant de 0.47066 à 0.37578, avant de remonter légèrement à 0.38998 en 2100. De 2023 à 2040, la

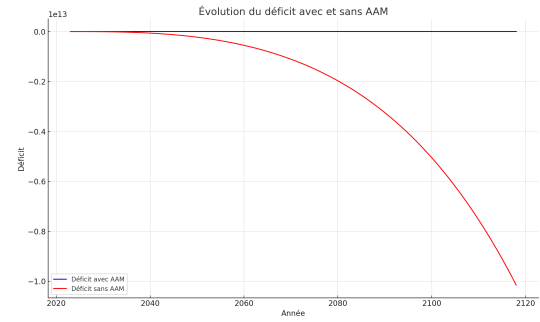
Année	2023	2030	2040	2050	2060	2070	2080
QV	0.470	0.447	0.405	0.39	0.385	0.381	0.377

TABLE 4.2.6 – Évolution des Quotients de vieillesse

diminution est significative, indiquant une réduction notable de la proportion de la population âgée. De 2040 à 2070, la décroissance continue à un rythme plus lent, et de 2070 à 2090, elle ralentit encore, suggérant une stabilisation. Nous recalculons également la valeur de  $V_t$  en tenant compte des nouveaux âges de retraite et obtenons les pensions ajustées.



(a) Évolution des pensions



(b) Évolution du déficit cumulé

FIGURE 4.2.11 – pensions et déficits cumulés

Ces résultats montrent que sans l'ajustement de l'âge de retraite, le système de retraite devient rapidement insoutenable, incapable d'équilibrer les cotisations et les prestations. En revanche, l'augmentation contrôlée de l'âge de départ à la retraite a permis de ralentir la dégradation de la solvabilité, contribuant à une meilleure gestion financière du système de retraite.

#### 4.2.5 Ajustement des Pensions d'entrée par le biais d'un facteur de durabilité

Dans ce scénario, la structure projetée de la population demeure similaire à celle d'origine, sans modification du nombre d'actifs et de retraités. Les paramètres du régime, tels que le salaire moyen réévalué et la valeur cumulative moyenne des revenus pensionnables, restent identiques à ceux du scénario de base.

Pour garantir la viabilité financière des régimes de retraite face à l'allongement de l'espérance de vie et l'augmentation des dépenses, un facteur de durabilité est introduit pour ajuster les pensions d'entrée. Ce facteur réduit progressivement le taux de remplacement tout en offrant des options flexibles pour l'âge de la retraite, équilibrant ainsi les dépenses et maintenant l'équité inter-générationnelle. La formule du facteur de durabilité ( $SF_{x_r(t)}$ ) est :

$$SF_{x_r}(t) = SF_{x_r}(0) \cdot \frac{a_{x_r}^{\pi,y}(0)}{a_{x_r}^{\pi,y}(t)} \cdot \frac{D_0}{D_t}$$

où :  $SF_{x_r}(t)$  est le facteur de durabilité à l'année  $t$ ,  $SF_{x_r}(0)$  est le facteur initial,  $a_{x_r}^{\pi,y}$  et

$a_{x_r(t)}^{\pi,y}$  sont les facteurs de rente viagère initial et à l'année  $t$ ,  $D_t$  et  $D_0$  sont les quotients de vieillesse actuels et de référence.

Ce mécanisme ajuste les pensions d'entrée pour compenser les dépenses supplémentaires dues à l'espérance de vie, assurant ainsi l'équilibre financier et l'équité inter-générationnelle des régimes de retraite.

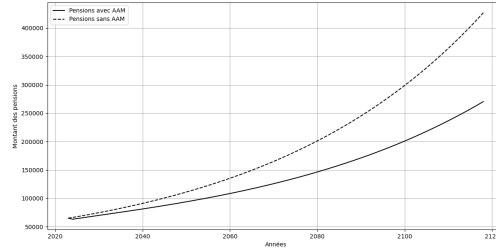


FIGURE 4.2.12 – Évolution des pensions avec et sans ajustements

L'analyse comparée des pensions avec et sans Ajustement Automatique (AAM) (fig 4.2.12) révèle des différences significatives en termes de croissance et de stabilité. Les pensions avec AAM augmentent de manière régulière, offrant une protection contre l'inflation et assurant la stabilité du pouvoir d'achat des retraités. En revanche, les pensions sans AAM montrent une croissance plus rapide, mais moins prévisible, exposant ainsi les retraités à une plus grande volatilité économique, cette situation peut mettre en péril la viabilité financière des régimes de retraite, surtout en période de forte inflation ou de faibles rendements d'investissement. En revanche, les pensions avec AAM peuvent contribuer à maintenir l'équité intergénérationnelle et la durabilité du régime en évitant des augmentations excessives et en offrant une croissance plus stable.

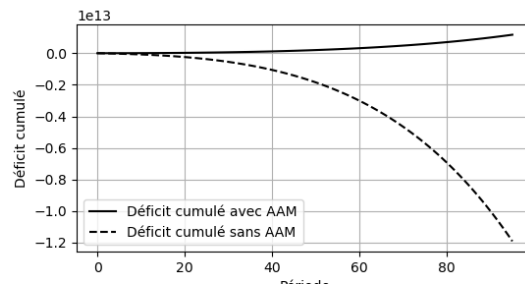


FIGURE 4.2.13 – Évolution des déficits cumulés

Le déficit cumulé (fig 4.2.13) avec AAM débute à 0 et croît de manière contrôlée pour atteindre 1,171,196,777 à la fin de la période analysée. Cette progression linéaire suggère que l'application d'ajustements automatiques des pensions permet de mieux maîtriser les dépenses du régime. En alignant les augmentations de pensions sur l'inflation ou d'autres indices économiques, le mécanisme AAM garantit une stabilité relative et limite les augmentations imprévues des déficits. Comparativement, les déficits observés sans AAM sont non seulement plus élevés, mais augmentent également à un rythme beaucoup plus rapide. Cette tendance

met en danger la viabilité financière du régime de retraite et nécessite une gestion beaucoup plus prudente et proactive pour éviter des déséquilibres insoutenables. L'introduction et le maintien des ajustements automatiques se révèlent donc essentiels pour garantir la pérennité et la stabilité du régime. L'ajustement a permis de lisser les fluctuations économiques et de maintenir les dépenses en adéquation avec les ressources disponibles, assurant ainsi une meilleure équité intergénérationnelle.

La rentabilité financière avec AAM présente une tendance positive et stable, avec un faible niveau de volatilité. Cela a un impact favorable sur les régimes de retraite en augmentant la sécurité des fonds, réduisant les risques et potentiellement permettant des ajustements bénéfiques des contributions.

L'ajustement des contributions consiste à modifier le taux de cotisation des actifs en réponse aux performances financières de notre régime de retraite. Cette pratique a renforcé la solvabilité du régime en assurant que les cotisations restent suffisantes pour couvrir les obligations futures, réduisant ainsi le risque de sous-financement. En ajustant les contributions, on obtient une collecte de fonds stable et prévisible, ce qui améliore la sécurité financière du régime et optimise les rendements grâce à une meilleure gestion des flux de trésorerie.

L'ajustement des prestations implique la modification des prestations futures ou courantes en fonction des performances financières du régime. En ajustant les prestations, le régime peut mieux aligner les sorties de trésorerie avec les ressources disponibles, maintenant un équilibre financier et réduisant le risque de déficit. Cette flexibilité permet de gérer efficacement les obligations financières en réduisant les décaissements excessifs en période de faibles rendements et en profitant des hausses en périodes favorables, ce qui maximise les rendements globaux et améliore la résilience financière du régime.

## 4.3 Étude de la sensibilité

Nous faisons une analyse des scénarios de sensibilité pour évaluer l'impact de différentes hypothèses démographiques et économiques :

### 4.3.1 Scénarios de Stress Démographique

#### 4.3.1.1 Diminution de la natalité

La simulation d'une baisse de la natalité de 1% par an à partir de 2024, stabilisée après 2034, révèle des changements significatifs dans la structure démographique par rapport à la situation de base. La population totale continue à croître, mais à un rythme plus lent. Dans la situation initiale, la population passe de 8,195,568 en 2023 à 8,278,683 en 2123, tandis que dans le scénario de base (SB), elle commence à 8,195,568 en 2023 pour atteindre 9,222,589 en 2123.

La population active est particulièrement affectée par la baisse de la natalité. Dans le nouveau scénario 1 ( $SN_1$ ) elle diminue progressivement de 3,876,040 en 2023 à 3,555,657 en 2123. En revanche, le scénario de base montre une légère augmentation de la population active, passant de 3,876,040 en 2023 à 3,971,301 en 2123. Cette tendance accentue la pression sur les actifs pour soutenir les retraités augmente, exacerbée par une population vieillissante.

La population des retraités croît également, mais à un rythme légèrement plus lent dans le long terme. Dans le  $NS_1$  scénario, elle augmente de 1,824,287 en 2023 à 2,485,035 en 2123. Dans le SB, cette population passe de 1,914,251 en 2023 à 2,849,095 en 2123. Cette légère baisse reflète une espérance de vie moins longue et un vieillissement de moins en moins rapide de la population. Le nombre de retraités pose des défis significatifs pour les systèmes de Sécurité sociale et de retraite, nécessitant des ajustements de la politique du régime de retraite.

Les quotients de vieillesse (QV) des deux scénarios,  $NS_1$  et SB (initial), révèlent des dynamiques démographiques différentes avec des implications significatives pour les systèmes de retraite. Dans la situation  $NS_1$ , le QV augmente de 0.471 en 2023 à 0.699 en 2123, montrant une croissance progressive et stable, avec une légère stabilisation vers la fin de la période. En revanche, dans la situation SB initiale, le QV passe de 0.494 en 2023 à 0.717 en 2123, indiquant une augmentation plus rapide et continue sans stabilisation. Cette différence suggère que la population des retraités croît moins rapidement dans la situation  $NS_1$ , diminuant la pression sur la population active.

### Ajustement du taux de cotisation

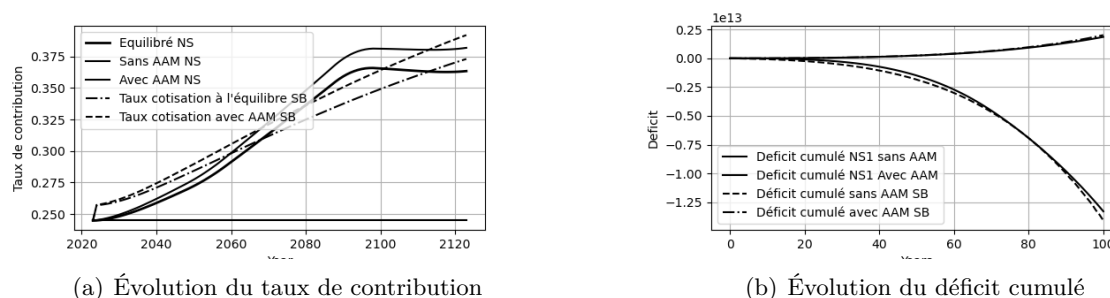


FIGURE 4.3.1 – Taux de cotisations et déficits cumulés

Pour un taux de remplacement identique, c'est-à-dire 0.52, l'analyse des taux de cotisation pour le système de retraite dans le scénario  $NS_1$  met en lumière des ajustements nécessaires pour garantir sa viabilité financière à long terme. Le taux de cotisation d'équilibre, qui progresse de 0.2447 en 2023 à 0.3634 en 2123, souligne la nécessité d'augmentations régulières pour répondre à l'accroissement des besoins des retraités. Un taux de cotisation fixe, sans ajustement automatique, à 0.2447, s'avère insoutenable, entraînant des déficits financiers substantiels et compromettant la durabilité du système. À l'inverse, l'ajustement automatique (AAM), bien qu'efficace pour maintenir l'équilibre financier, impose une charge croissante sur les actifs, atteignant environ 0.3819 en 2123.

La comparaison des déficits cumulés entre les scénarios de base (SB) et le nouveau scénario ( $NS_1$ ) montre des différences notables, particulièrement en tenant compte l'ajustement automatique (AAM). Sans AAM, les deux scénarios affichent une détérioration financière sévère, mais le  $NS_1$  est plus vulnérable avec une augmentation de déficit de 22.033.233 contre 20.366.667 pour le SB. Avec l'application des AAM, la situation s'améliore nettement. Le déficit cumulé du SB augmente, passant de 807 millions à environ 14,6 milliards d'euros, tandis que le NS voit son déficit croître, passant de 768 millions à environ 13,4 milliards

d'euros. Cette gestion plus efficace des déficits dans le  $NS_1$  avec AAM indique une meilleure stabilité financière à long terme, rendant le NS préférable au SB lorsqu'on applique les AAM.

#### 4.3.1.2 Variation de l'âge de la retraite

Nous allons étudier le cas où l'âge de la retraite est revu à 60 ans et le cas où l'âge de la retraite est allongé à 68 ans.

##### L'âge de la retraite à 60 ans

Nous supposons que l'âge de la retraite est de 60 ans et nous gardons le même taux de remplacement, cela implique une période cotisation plus courte et une augmentation du taux d'accumulation  $\theta_t$ , la principale conséquence de la modification est la chute des prestations dû au retraité.

Les scénarios, NS2 et SB, montrent des tendances similaires de croissance démographique et de vieillissement de la population de 2023 à 2123, bien qu'avec quelques différences notables. Dans le cas de NS2, la population totale a augmenté de 12,4%, passant de 8,20 millions à 9,22 millions, avec une forte croissance des actifs (109,4%) et une augmentation plus modérée des retraités (43,6%). Le quotient de vieillesse pour NS2 est passé de 0,62 à 0,88, indiquant un vieillissement significatif de la population. En revanche, pour SB, la population totale a également augmenté de 12,4%, passant de 8,20 millions à 9,22 millions, mais avec une croissance des actifs (83,7%) et des retraités (118,8%) plus accentués qu'en NS2. Le quotient de vieillesse pour SB est passé de 0,47 à 0,71 sur la même période, montrant également un vieillissement démographique marqué.

La progression rapide du quotient de vieillesse, qui est passé de 0,47 en 2023 à 0,88 en 2123, présente un défi significatif pour la viabilité financière du système de retraite. Avec un taux de cotisation initial de 0.324, il est devenu évident que ces cotisations ne seront pas suffisantes pour couvrir les prestations de retraite prévues pour la population vieillissante. Cette divergence croissante entre les contributions et les besoins de prestation pourrait conduire à l'insolvabilité du système à long terme

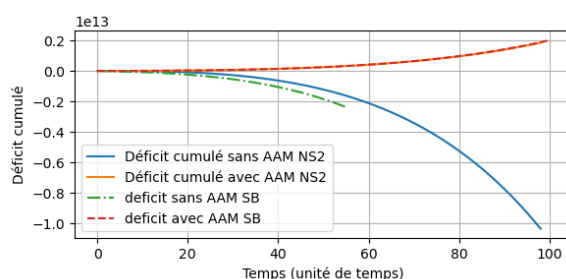


FIGURE 4.3.2 – Évolution déficit cumulé  $SN_2$

La comparaison entre les systèmes NS2 et SB, en termes d'évolution des déficits cumulés avant et après l'introduction de l'âge d'adhésion minimale (AAM) et d'augmentation contrôlée du taux de cotisation, met en lumière des résultats contrastés, mais tous deux positifs à long terme.

Avant l'introduction de l'AAM, le système NS2 montre une tendance à l'aggravation du déficit cumulé, atteignant -1,035 billion en 2123, soulignant les défis majeurs posés par le vieillissement démographique et les déséquilibres actifs-retraité. En revanche, le système SB affiche un déficit cumulé bien plus profond, atteignant -14,1 billions à la fin de la période projetée avant les réformes.

Avec l'introduction de l'AAM, les deux systèmes connaissent une amélioration significative. NS2, initialement à un déficit de -55,30 milliards en 2023, parvient à générer des excédents à partir de 2024, avec un excédent cumulé atteignant 1,035 billion en 2123. Le système SB, avec des excédents modestes commençant à 97,7 millions en 2023, progresse pour atteindre 2,02 billions en 2123. Bien que l'âge de la retraite soit remonté à 60 ans, la rentabilité du régime est la même après augmentation du taux de cotisation.

### Ajustement des Pensions d'entrée par le biais d'un facteur de durabilité

La réduction de l'âge de la retraite à 60 ans améliore le déficit du régime par rapport au scénario de base. En abaissant les pensions de base, cette mesure réduit les déficits en équilibrant les cotisations et les prestations, rapprochant ainsi leur niveau. La solvabilité du régime, dans ce contexte, devient comparable entre les deux scénarios, avec une trajectoire similaire. la rentabilité du régime se voit ainsi amélioré

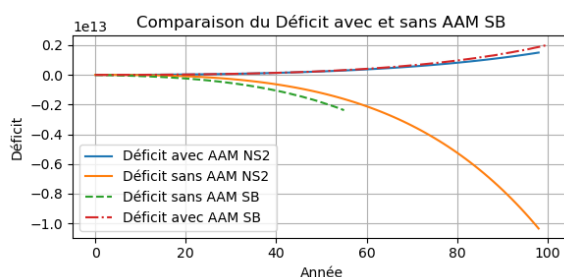


FIGURE 4.3.3 – Évolution déficit cumulé  $SN_2$

### L'âge de la retraite à 68 ans

D'un autre côté l'impact de l'âge de la retraite fixé à 68 ans sur la viabilité de notre système de retraite est faite en comparant les scénarios  $NS_3$  et  $SB$  et nous gardons le même taux de remplacement cela implique une période cotisation plus longue et une réduction du taux d'accumulation  $\theta_t$  qui passe de 1.3% à 1.21% , la principale conséquence de cette augmentation de l'âge de la retraite est l'augmentation de la valeur cumulative moyenne des revenus pensionnables et par là, le salaire moyen réévalué. les prestations sont donc ainsi réévaluées

L'augmentation continue du nombre de retraités par rapport aux actifs mettra une pression croissante sur le régime de retraite. Le nombre d'actifs passe de 4,226,810 en 2023 à environ 4,358,666 en 2123, tandis que le nombre de retraités augmente rapidement de 1,473,517 à environ 2,364,320. Le coefficient de vieillesse (QV) passe de 0.348 à environ 0.542, indiquant une proportion croissante de retraités par rapport aux actifs.

Avec un taux de cotisation initial de 0.181, le régime risque de ne pas être financièrement viable à long terme sans ajustements. Pour maintenir l'équilibre financier, il sera nécessaire de mettre en place des politiques d'ajustements. Néanmoins, ce taux est bien plus faible que celui de le scénario de base 0.244.

### Ajustement du taux de cotisation

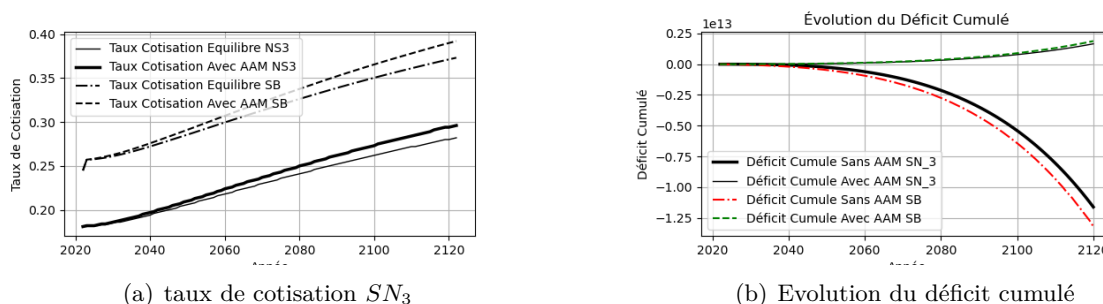


FIGURE 4.3.4 – Comparaison des scénarios de base et nouveau scénario 3 (ajustement des taux cotisations)

Les taux de cotisation (fig 4.4(a)) augmentent dans  $NS_3$ , atteignant 0,282 en 2123, par rapport à un taux constant de 0,181 de la génération 0. Avec AAM, le taux de cotisation dans  $NS_3$  atteint 0,296 en 2123. L'analyse des courbes de déficit cumulé (fig 4.5(b)) pour les régimes de retraite  $SN_3$  et SB, avec et sans mécanismes d'ajustement (AAM), révèle des tendances marquées. Sans ajustement des taux de cotisations, les deux régimes montrent une croissance exponentielle du déficit cumulé. Le déficit pour le régime  $SN_3$  sans AAM atteint environ 11,609 milliards en 2123, indiquant une perte massive et insoutenable. De même, le régime SB sans AAM présente une tendance similaire. En revanche, avec l'ajustement, les courbes montrent une amélioration significative. Pour les deux régimes,  $SN_3$  et SB, l'augmentation du taux de cotisation, transforme les déficits potentiels en excédents.

### Ajustement des Pensions d'entrée par le biais d'un facteur de durabilité

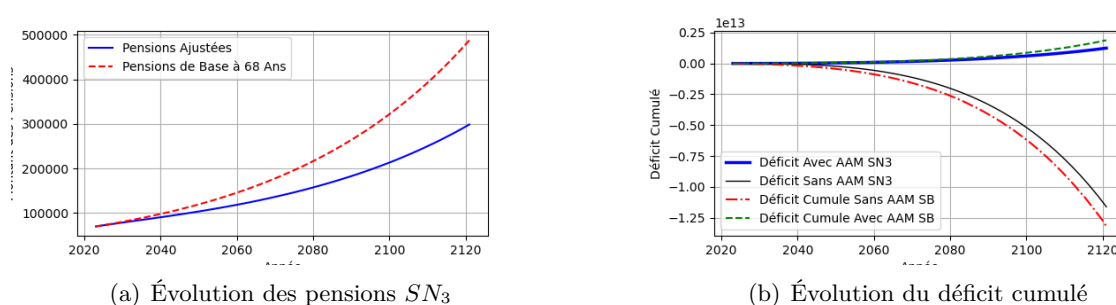


FIGURE 4.3.5 – Comparaison du scénario de base et nouveau scénario 3 (ajustement des pensions)

Le report de l'âge de la retraite à 68 ans entraîne un allongement de la durée de cotisation, augmentant ainsi le niveau des prestations pour chaque retraité. Toutefois, en maintenant

un taux de cotisation fixe pour toutes les générations, les recettes de cotisations deviennent insuffisantes pour couvrir les prestations à long terme, aggravant même la situation par rapport au scénario de base (SB). Pour remédier à cette situation, l'application d'un facteur de durabilité aux pensions permet de les ajuster à la baisse, comme le montre la figure 4.5(a). Cette mesure vise à stabiliser le régime en réduisant les prestations, alignant ainsi les dépenses sur les recettes de cotisations. La figure 4.5(b) met en évidence l'impact positif de cette approche : le déficit du régime se réduit progressivement jusqu'à atteindre un excédent. Cela montre que, malgré l'allongement de la durée de cotisation, l'ajustement des prestations par le facteur de durabilité permet de rétablir l'équilibre financier du régime et d'assurer sa viabilité à long terme. La rentabilité financière du régime montre que la réduction des prestations pour le  $SN_3$  donne un résultat légèrement meilleur à la situation de base.

### 4.3.2 Scénario de stress Économique

#### 4.3.2.1 Variation du taux de revalorisation des pensions ( $\pi_t$ )

Dans ce scénario, les prestations et les cotisations du scénario SB ne sont pas directement affectées par la variation du taux de revalorisation des pensions. Cependant, les mécanismes d'ajustement, notamment le facteur de rente  $a_{x_r(t)}$ , jouent un rôle crucial. En effet, une variation à la hausse ou à la baisse de ce taux influence le taux de cotisation ajusté ainsi que le facteur de soutenabilité.

Initialement, nous avons fixé ce taux à zéro. Nous allons maintenant le faire varier de 1% et analyser l'impact de cette variation sur la durabilité et l'équité des pensions, en mettant en lumière les implications financières et actuarielles de chaque cas.

#### Ajustement du taux de cotisation

Lorsque l'âge de la retraite reste constant, le taux de cotisation nécessaire pour financer les pensions dépend de la relation entre le taux de revalorisation des pensions ( $\pi_t$ ) et le taux de rendement interne ( $y_t$ ). Si  $\pi_t$  est supérieur à  $y_t$ , les pensions augmentent plus rapidement, ce qui nécessite des taux de cotisation plus élevés pour financer ces prestations accrues, augmentant ainsi la charge sur les travailleurs actuels. En revanche, si  $\pi_t$  est inférieur à  $y_t$ , les pensions augmentent plus lentement, ce qui permet de réduire les taux de cotisation nécessaires, bien qu'il soit crucial de garantir que les pensions restent suffisantes pour assurer une retraite décente. Un équilibre doit être trouvé entre la durabilité financière et l'équité intergénérationnelle pour maintenir la viabilité du système de retraite.

Le cas où le taux de revalorisation des pensions ( $\pi_t$ ) est égal au taux de rendement interne ( $y_t$ ) est intéressant, car dans ce scénario, le calcul de l'ajustement du taux de cotisation dépend uniquement de l'espérance de vie de chaque génération. En d'autres termes, le calcul devient indépendant de toute implication financière, simplifiant ainsi la gestion actuarielle du système de retraite.

En introduisant des AAM avec différents taux de revalorisation, nous observons des améliorations notables : à 1% et 2%, le déficit cumulé continue d'augmenter, mais à un rythme réduit, tandis qu'à 3%, la croissance du déficit est encore plus contenue. Le scénario avec un taux de 4% démontre une réduction significative du déficit cumulé, atteignant même des

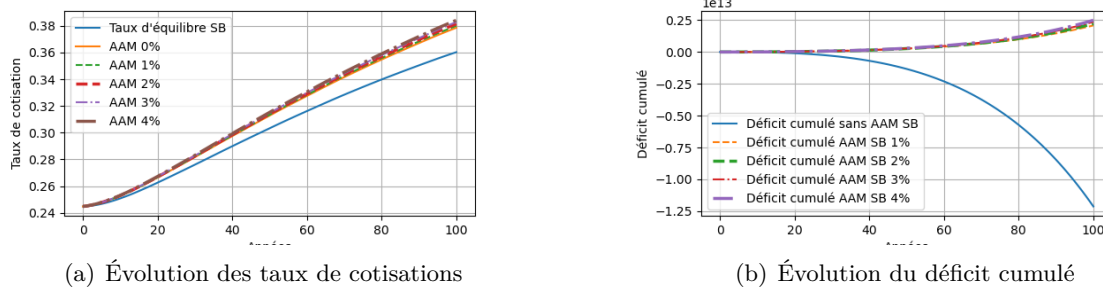


FIGURE 4.3.6 – Évolution des taux de cotisation et déficits cumulés en fonction du taux de revalorisation des pensions

valeurs positives, ce qui indique une amélioration du système de retraite et une meilleure gestion financière.

### Ajustement des Pensions d'entrée par le biais d'un facteur de durabilité

Lorsqu'on ajuste les pensions en fonction du taux de rendement interne ( $y_t$ ) et du taux de revalorisation des pensions ( $\pi_t$ ), en maintenant le taux de cotisation constant ( $c_0$ ) et l'âge de la retraite fixe, la durabilité financière du système de retraite dépend fortement de la relation entre ces taux. Si  $y_t > \pi_t$ , les pensions augmentent plus lentement que le rendement interne, ce qui réduit la pression financière et nécessite des ajustements moins fréquents de l'âge de la retraite. En revanche, si  $y_t < \pi_t$ , les pensions augmentent plus rapidement, augmentant la dette actuarielle et nécessitant des ajustements plus fréquents et plus importants pour maintenir la viabilité du système. Le facteur de durabilité ( $SF_{x_r(t)}$ ) ajuste les pensions en fonction de la valeur actuelle des prestations et de la dette actuarielle pour assurer l'équilibre financier du système de retraite.

L'analyse des données montre que le déficit cumulé du système de retraite est fortement influencé par le taux de revalorisation des pensions. Sans ajustement pour la durabilité (sans AAM), le déficit cumulé augmente de manière dramatique, atteignant des niveaux insoutenables à long terme. Cela indique qu'un manque de mécanismes d'ajustement conduit à une accumulation rapide de dettes, compromettant la viabilité du système de retraite.

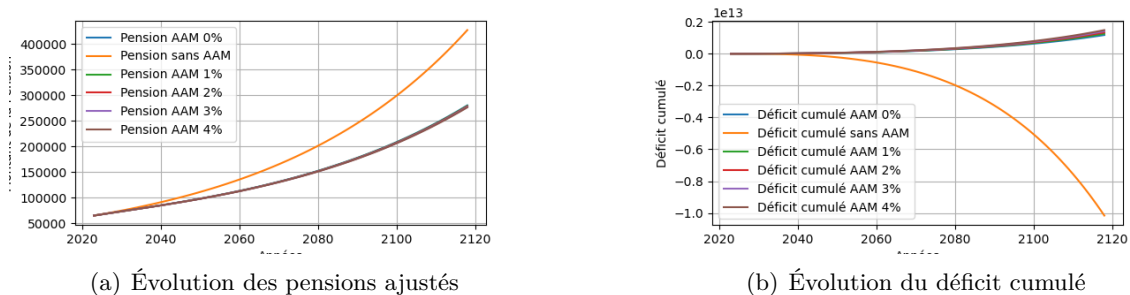


FIGURE 4.3.7 – Évolution des pensions ajustés et des déficits cumulés en fonction du taux de revalorisation des pensions

Lorsque les pensions sont ajustées pour la durabilité (AAM) avec des taux de revalorisation allant de 0% à 4%, le déficit cumulé reste plus contrôlé et augmente de manière plus modérée. Plus le taux de revalorisation des pensions est élevé, plus le déficit cumulé est important, mais il reste toujours inférieur au scénario sans AAM. Cela démontre l'efficacité des ajustements pour la durabilité dans la gestion du déficit du système de retraite. Les ajustements modérés pour la durabilité permettent de maintenir un équilibre financier et d'éviter un déficit excessif à long terme.

Bien que les mécanismes d'ajustement des pensions sociales soient conçus pour maintenir l'équité inter-générationnelle, ils engendrent fréquemment des débats au sein de la population concernée. Les hausses du taux de cotisation sont souvent perçues comme défavorables aux individus à revenu modeste, tandis que l'élévation de l'âge de la retraite prolonge la période de travail pour ceux œuvrant dans les secteurs manuels. Afin d'assurer la stabilité des taux de cotisation et des ratios de remplacement face à l'augmentation du ratio de dépendance, il est impératif de développer des approches alternatives. Cette démarche requiert une évaluation rigoureuse des impacts socio-économiques et une consultation approfondie de toutes les parties prenantes, en vue de trouver des solutions équilibrées et pérennes pour le système de retraite.

#### 4.4 Alternative aux mécanismes d'ajustements automatiques : La règle de MUSGRAVE

La règle de Musgrave est une approche économique utilisée pour déterminer les taux de cotisation et les taux de remplacement dans les systèmes de retraite. Elle se concentre sur l'équilibre entre les contributions des actifs et les prestations versées aux retraités. La règle porte le nom de Richard A. Musgrave, un économiste qui a largement contribué à la théorie de la finance publique.

##### 4.4.1 Principe de la Règle de Musgrave

La règle de Musgrave vise à assurer un financement adéquat des régimes de retraite par répartition, où les cotisations des travailleurs actifs financent les pensions des retraités. Elle repose sur deux principes fondamentaux :

1. **Équilibre Actuariel** : Il est essentiel de maintenir un équilibre entre les cotisations versées par les actifs et les prestations perçues par les retraités. Cela implique une évaluation précise des besoins futurs en termes de prestations et une adaptation des taux de cotisation en conséquence.
2. **Équité Intergénérationnelle** : Les charges doivent être équitablement réparties entre les générations successives. Les générations actuelles ne doivent pas être surchargées au détriment des générations futures, et vice versa.

##### 4.4.2 La Règle de Musgrave et le Partage des Risques entre Actifs et Retraités

La règle de Musgrave propose une approche innovante pour le calcul des taux de cotisation et des taux de remplacement dans les régimes de retraite. Cette règle introduit un autre invariant, appelé ratio de Musgrave, noté  $M$ , qui représente le rapport entre la pension moyenne

et le salaire moyen net de cotisation retraite. Cette approche permet de considérer le pouvoir d'achat des retraités par rapport à celui des actifs, en tenant compte des cotisations retraite.

#### 4.4.2.1 Définition du Ratio de Musgrave

Le ratio de Musgrave  $M$  se définit comme suit :

$$M_t = \frac{P_t}{S_t(1 - c_t)}$$

où :

- .  $P_t$  est la pension moyenne à l'instant  $t$ ,
- .  $S_t$  est le salaire moyen à l'instant  $t$ ,
- .  $c_t$  est le taux de cotisation retraite à l'instant  $t$ .

Ce ratio exprime un rapport de pouvoir d'achat, car il tient compte du fait qu'une partie du salaire des actifs est destinée à financer les retraites et n'est donc pas disponible pour la consommation des actifs, contrairement aux retraités qui ne sont pas soumis à ce prélèvement.

Considérons une situation initiale équilibrée (état 1) satisfaisant la relation :

$$c_1 = D_1\delta_1$$

où  $D_1$  est le ratio de dépendance initial et  $\delta_1$  est le taux de remplacement initial. Si le système évolue vers un nouvel état (état 2) caractérisé par un ratio de dépendance  $D_2$ , avec  $D_2 > D_1$  en raison du vieillissement de la population, il devient nécessaire de déterminer de nouvelles valeurs pour le taux de cotisation  $c_2$  et le taux de remplacement  $\delta_2$ .

#### 4.4.2.2 Ajustement des Paramètres

Dans un régime à prestations définies, le ratio de Musgrave augmente lorsque le ratio de dépendance augmente. Cela signifie que pour maintenir l'équilibre, il faut ajuster les taux de cotisation et de remplacement en conséquence. La nouvelle valeur du ratio de Musgrave peut être exprimée ainsi :

$$M_2 = \frac{\delta_2}{(1 - c_2)} = \frac{\delta_1}{(1 - c_1 \frac{D_2}{D_1})}$$

En prenant en compte que  $c_2 = D_2\delta_2$ , on peut réécrire cette équation comme :

$$M_2 = \frac{\delta_2}{(1 - D_2\delta_2)}$$

La règle de Musgrave vise à stabiliser le ratio  $M$  en cas de modification du ratio de dépendance. Cela implique que :  $M_1 = M_2 = M$

$$M = \frac{\delta_2}{(1 - D_2\delta_2)}$$

Pour trouver les nouvelles valeurs de  $\delta_2$  et  $c_2$ , nous résolvons l'équation ci-dessus pour  $\delta_2$  :

$$\delta_2 = \frac{M}{1 + MD_2}$$

Ensuite, le taux de cotisation  $c_2$  peut être calculé à partir de la relation  $c_2 = D_2\delta_2$  :

$$c_2 = \frac{MD_2}{1 + MD_2}$$

Ces résultats montrent que, en réponse à une augmentation du ratio de dépendance  $D_2$  : Le taux de remplacement  $\delta_2$  diminue par rapport à son niveau initial  $\delta_1$ , Le taux de cotisation  $c_2$  augmente pour compenser l'augmentation du ratio de dépendance.

La formule de récurrence du taux de remplacement est donc :

$$\delta_2 = \frac{M}{1 + MD_2} = \frac{\frac{\delta_1}{(1 - c_1)}}{1 + \frac{\delta_1}{(1 - c_1)}D_2} = \delta_1 \cdot \frac{1}{(1 + \delta_1(D_2 - D_1))}$$

donc

$$\delta_2 = \delta_1 \cdot \frac{1}{(1 + \delta_1(D_2 - D_1))}$$

à l'ordre  $n$  on a

$$\delta_n = \delta_{n-1} \cdot \frac{1}{(1 + \delta_{n-1}(D_n - D_{n-1}))}$$

de même la formule de récurrence du taux de remplacement est donc :

$$c_2 = \frac{M \cdot D_2}{1 + MD_2} = \frac{D_2 \frac{\frac{c_1}{D_1}}{(1 - c_1)}}{1 + \frac{\frac{c_1}{D_1}}{(1 - c_2)}D_2} = c_1 \cdot \frac{D_2}{(1 + c_1(D_2 - D_1))}$$

donc

$$c_2 = c_1 \cdot \frac{D_2}{(1 + c_1(D_2 - D_1))}$$

à l'ordre  $n$  on a

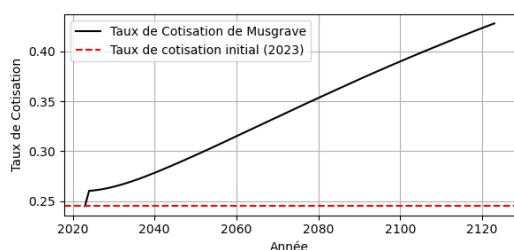
$$c_n = c_{n-1} \cdot \frac{D_n}{(1 + c_{n-1}(D_n - D_{n-1}))}$$

#### 4.4.3 Application de la règle de MUSGRAVE

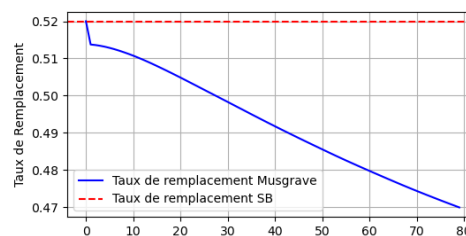
Nous allons appliquer la règle de MUSGRAVE à notre population, avec les paramètres identiques que le scénario de base défini plus haut. Nous considérons la génération initiale comme celle de 2023, il est question de calculer le taux de cotisation initiale  $c_0$  et de le projeter sur les autres générations.

L'analyse des taux de cotisation de Musgrave (fig 4.1(a)) de 2023 à 2123 révèle une augmentation constante et progressive des taux pour maintenir l'équilibre du système de retraite face à une population vieillissante. Initialement, en 2023, le taux de cotisation est de 0.2447, et il augmente à 0.2677 en 2033, marquant une hausse d'environ 9.39%. À moyen terme,

de 2034 à 2050, le taux continue de croître, atteignant 0.2941 en 2050, soit une augmentation de 20.15% par rapport à 2023. Cette progression modérée au début permet une adaptation progressive aux changements démographiques, tandis qu'à moyen terme, des ajustements significatifs deviennent nécessaires pour le financement des retraites.



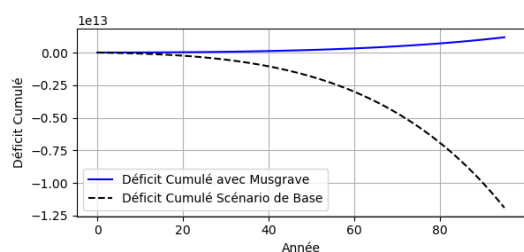
(a) Évolution du taux de cotisations de Musgrave



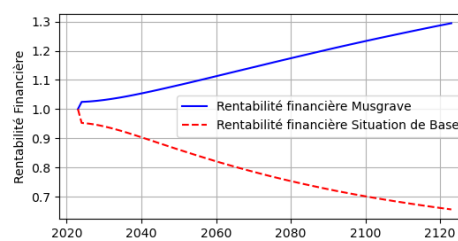
(b) Évolution du taux de remplacement

FIGURE 4.4.1 – Evolution des taux cotisations et remplacements de Musgrave

À long terme, de 2051 à 2123, les taux de cotisation augmentent de manière substantielle, atteignant 0.4019 en 2100 et 0.4280 en 2123, représentant des augmentations respectives de 64.17% et 74.91% par rapport à 2023. Ces augmentations significatives indiquent des défis financiers croissants pour le système de retraite, soulignant la nécessité de réformes structurelles pour assurer sa viabilité à long terme. L'augmentation des taux de cotisation est compensée par la baisse du taux de remplacement (fig 4.1(b)) afin de permettre un équilibre entre les cotisations et les prestations à une limite nécessaire pour que le régime ne soit pas en déficits.



(a) Évolution du déficit cumulé de Musgrave



(b) Évolution de rentabilité financière cumulée

FIGURE 4.4.2 – Évolution du déficit cumulé et rentabilité financière de Musgrave

L'analyse des figures (fig4.4.2) montre un contraste marqué entre les deux scénarios de rentabilité financière sur la période de 2023 à 2123. La rentabilité de Musgrave (Déficit cumulé) augmente continuellement, reflétant une amélioration régulière et cumulative de la performance financière, tandis que celle de la situation de base (SB) diminue progressivement, indiquant des défis structurels ou des pressions économiques défavorables. Cette comparaison souligne que les stratégies adoptées sous le scénario de Musgrave sont plus efficaces pour maintenir et améliorer la rentabilité financière à long terme.

La règle de Musgrave représente un compromis entre les régimes de retraite à prestations définies et ceux à cotisations définies, en termes de taux de cotisation et de taux de remplacement. Dans ce cadre, les deux taux évoluent de manière opposée, ce qui implique une répartition du

risque entre les contributeurs et les bénéficiaires. Concrètement, une augmentation du ratio de dépendance entraîne simultanément une hausse du taux de cotisation et une baisse du taux de remplacement (fig 4.4.1). Cela contraste avec les régimes à prestations définies, où le risque est principalement supporté par les actifs, et les régimes à cotisations définies, où le risque est assumé par les retraités.

## 4.5 Comparaison des Différents mécanismes d'ajustements étudiés

Nous allons par le biais de la VAN (valeur Actuelle Net) comparés les différents mécanismes étudiés, nous prendrons comme taux d'actualisation  $y_t = 0.02$

Mécanisme d'ajustement	VAP Cotisations	VAP Prestations	Ratio solvabilité
Situation de Base	1,19115E+13	1,47085E+13	0,8098
Ajustement du taux de cotisation	1,5293E+13	1,47085E+13	1.039
$x_r$ avec amélioration des pensions	1,4895E+13	1,4895E+13	1
$x_r$ en conservant le TR	1,50229E+13	1,50229E+13	1
$x_r$ en conservant l'espérance de vie	1,53796E+13	1,53796E+13	1
facteur de durabilité	1,13155E+13	1,09259E+13	1.035
Musgrave	1,57001E+13	1,38682E+13	1.132

TABLE 4.5.1 – Comparaison entre les différents Modèles de mécanismes d'ajustements

Le tableau montre différentes stratégies pour ajuster le système de retraite en vue de garantir sa solvabilité. La situation de base présente un déficit, nécessitant des ajustements. Parmi les mécanismes proposés, l'ajustement du taux de cotisation et l'application du modèle de Musgrave semblent offrir des solutions solides pour non seulement atteindre l'équilibre mais aussi générer des excédents, assurant ainsi la pérennité du système à long terme.

## Chapitre 5

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons exploré en profondeur les défis posés par le vieillissement démographique et la baisse des taux de natalité sur la viabilité des systèmes de pension. En particulier, nous nous sommes concentrés sur l'efficacité des mécanismes d'ajustement automatique (MAA) pour maintenir la solvabilité et l'équité intergénérationnelle des systèmes de pension.

Les MAA ajustent automatiquement les paramètres des pensions en réponse aux changements démographiques et économiques, tels que l'âge de la retraite, les taux de cotisation, et les prestations en fonction de l'espérance de vie. Ces ajustements sont essentiels pour répondre aux défis posés par l'augmentation de l'espérance de vie et la diminution des taux de natalité, tout en garantissant la durabilité des systèmes de retraite.

Notre analyse a utilisé divers modèles quantitatifs stochastiques, notamment les modèles de Lee-Carter et Log-Poisson, pour évaluer l'impact des MAA sur le financement et la viabilité des systèmes de pension. Ces modèles permettent de prévoir avec précision l'espérance de vie et d'ajuster les pensions en conséquence, assurant ainsi une gestion proactive des risques démographiques et économiques.

Nous avons également mené une analyse comparative des MAA, principalement ceux étudiés par Ayuso M. et Jorge M. Bravo, mettant en évidence leurs avantages, comme la flexibilité et la réactivité, ainsi que leurs limitations, telles que l'impopularité potentielle de l'augmentation de l'âge de la retraite. Nos recommandations pour améliorer l'équité et la viabilité financière des régimes de pension soulignent que les MAA sont indispensables pour garantir la durabilité et l'équité des systèmes de retraite pour les générations actuelles et futures.

La règle de Musgrave a été identifiée comme une alternative efficace aux MAA. Cette règle propose un équilibre entre les contributions des actifs et les prestations des retraités en fonction de l'évolution du ratio de dépendance. En stabilisant le ratio de pouvoir d'achat entre les retraités et les actifs, la règle de Musgrave permet une répartition plus équitable des risques entre les générations. En conclusion, les MAA et la règle de Musgrave représentent des innovations cruciales pour la gestion des systèmes de pension face aux fluctuations

démographiques et économiques. Ils permettent de préserver la justice intergénérationnelle et d'assurer une répartition équitable des ressources, tout en maintenant la stabilité et la durabilité des systèmes de retraite à long terme.

# Chapitre 6

## Annexe

### 6.1 Annexe 1

#### Méthode de projection des $k_t$

Après avoir sélectionné le modèle Lee-Carter-Poisson adapté pour nos données, nous devons extraire la série temporelle des  $k_t$ , qui représente les composantes temporelles du modèle. Ces valeurs sont cruciales, car elles capturent les tendances temporelles de la mortalité. Pour projeter les taux de mortalité futurs et, par conséquent, la population à long terme, par exemple à l'horizon 2124,

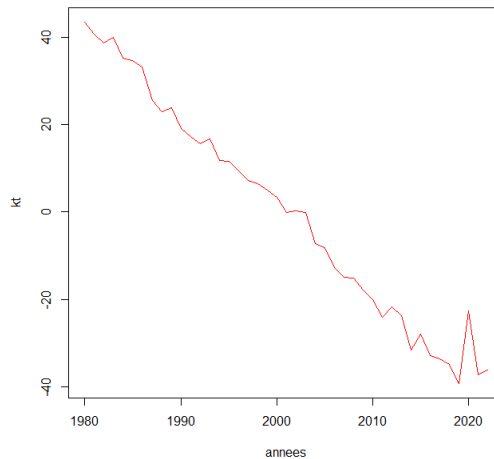


FIGURE 6.1.1 – Prédiction des  $k_t$

Le modèle ARIMA(p,d,q) est couramment utilisé pour modéliser des processus influencés par des chocs aléatoires au fil du temps, ce qui permet de prévoir les évolutions. Dans notre étude, nous avons appliqué ce modèle à la composante temporelle du taux de mortalité, afin de mieux comprendre et anticiper les variations de ce dernier.

L'estimation par un modèle ARIMA suppose que l'on travaille sur une série stationnaire. Ceci signifie que la moyenne de la série est constante dans le temps, ainsi que la variance. Nous admettons donc l'hypothèse suivante :

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + d + \epsilon_t$$

avec  $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Cela implique que :

$$\mathbb{E}(\kappa_{t_n+1}) = \kappa_{t_n} + kd$$

$$\mathbb{V}(\kappa_{t_n+1}) = k\sigma^2$$

Les paramètres  $d$  et  $\sigma^2$  sont estimés en maximisant la log-vraisemblance :

$$\hat{d} = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} (\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1})$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} (\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1} - \hat{d})^2$$

Les estimations des paramètres sont  $\hat{d} = -1.89817$  et  $\hat{\sigma}^2 = 18.3112$ . Ces résultats sont cohérents avec un processus  $\kappa_t$  en décroissance.

En utilisant les paramètres estimés, nous avons réalisé une simulation de 2 000 trajectoires de  $\kappa_t$  sur un horizon de 100 ans pour prédire les évolutions futures et estimer la tendance centrale. Après plusieurs essais, nous avons conclu que le modèle ARIMA(0,2,1) s'ajuste le mieux à la moyenne de nos données.

Nous constatons que la tendance centrale des simulations est très proche de notre modèle ARIMA(0, 2, 1)

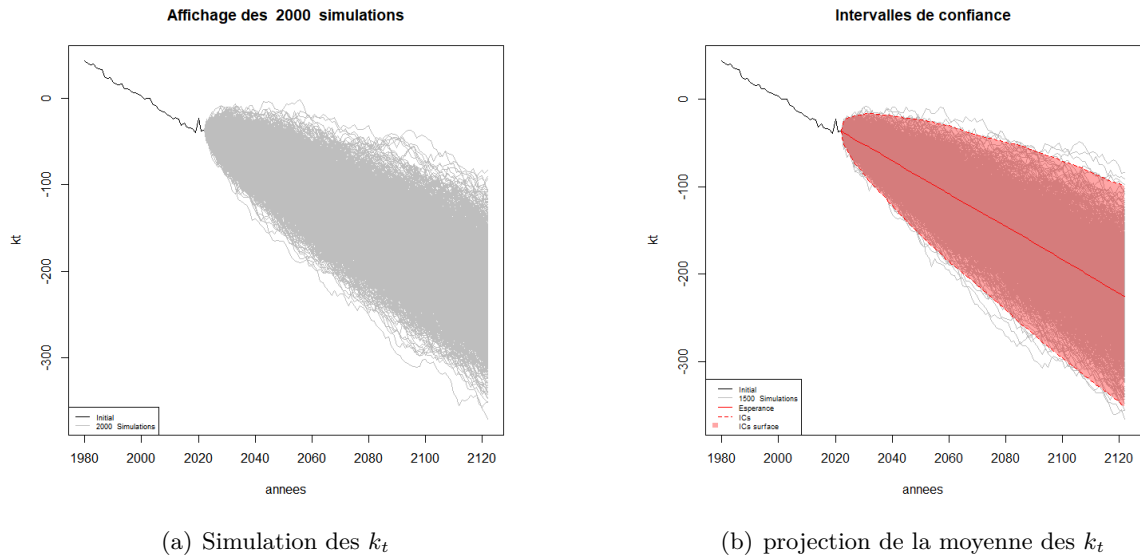
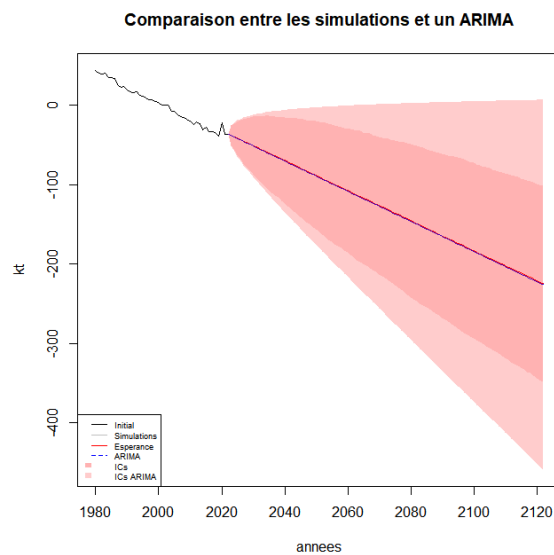
FIGURE 6.1.2 – Projection des  $k_t$ 

FIGURE 6.1.3 – Comparaison entre simulation et ARIMA(0,2,1)

Nous projetons ainsi l'espérance de vie.

Year	0	25	40	45	50	65	70
2023	81.20	56.55	42.00	37.26	32.63	19.69	15.77
2024	81.35	56.69	42.14	37.39	32.76	19.80	15.87
2025	81.54	56.87	42.31	37.56	32.92	19.94	15.99
2026	81.70	57.02	42.46	37.70	33.06	20.05	16.09
2027	81.85	57.17	42.60	37.84	33.19	20.17	16.19
2028	82.01	57.32	42.75	37.99	33.33	20.29	16.30
2029	82.16	57.46	42.88	38.12	33.46	20.39	16.39
2030	82.32	57.61	43.02	38.26	33.59	20.51	16.49
2031	82.47	57.76	43.16	38.39	33.73	20.62	16.59
2032	82.60	57.89	43.29	38.51	33.84	20.72	16.68
2033	82.76	58.03	43.43	38.65	33.98	20.83	16.78
2034	82.92	58.19	43.58	38.80	34.12	20.95	16.89
2035	83.06	58.32	43.70	38.92	34.24	21.05	16.98
2036	83.21	58.47	43.85	39.06	34.38	21.17	17.08
2037	83.37	58.62	44.00	39.21	34.52	21.28	17.19
2038	83.52	58.77	44.13	39.34	34.65	21.39	17.28
2039	83.66	58.90	44.26	39.46	34.77	21.49	17.37
2040	83.81	59.04	44.40	39.60	34.90	21.61	17.47
2041	83.93	59.16	44.51	39.72	35.01	21.70	17.56
2042	84.08	59.31	44.65	39.85	35.14	21.81	17.66

TABLE 6.1.1 – Projection de l'espérance de vie de 2023 à 2122

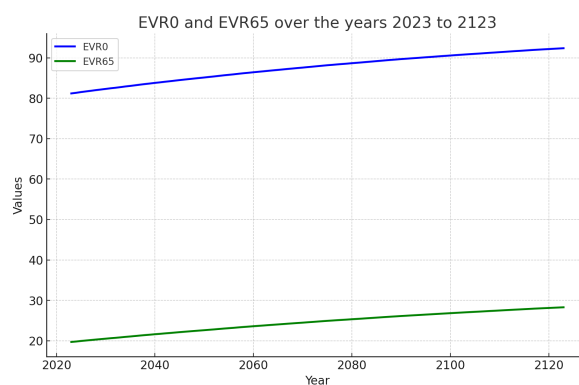


FIGURE 6.1.4 – Espérance de vie à 0 et à 65 ans

## 6.2 Annexe 2 : structure des populations après différents ajustement lié à l'âge des la retraite ou naissance

Changement de la structure de la population dû à l'ajustement de l'âge de la retraite

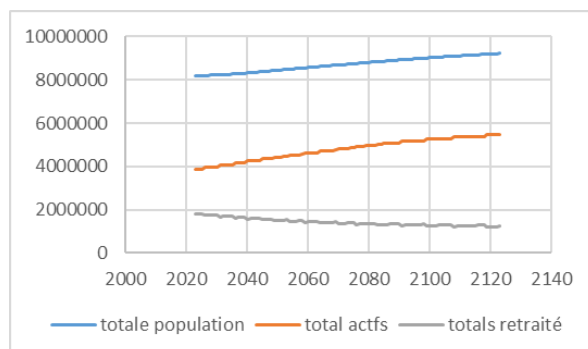


FIGURE 6.2.1 – structure de la population après ajustement de l'âge, la retraite

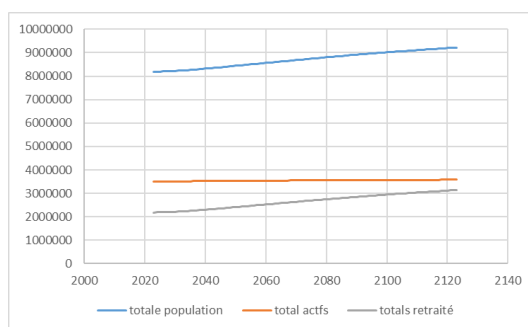


FIGURE 6.2.2 – structure de la population si l'âge de la retraite passe à 60 ans

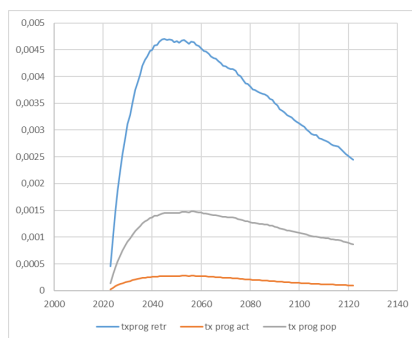


FIGURE 6.2.3 – Taux progression des groupes de populations si  $x_r$  est 60 ans

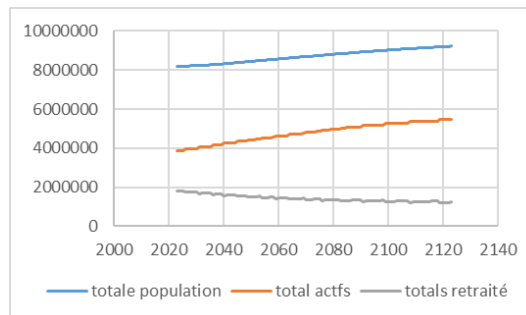


FIGURE 6.2.4 – structure de la population si l'âge de la retraite est supérieur à 65 ans

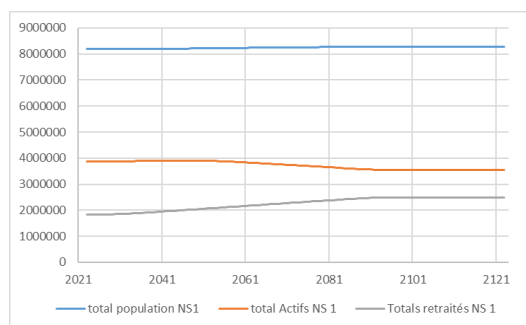


FIGURE 6.2.5 – Structure de la population si la naissance diminue et reste stable les 10 dernières années de l'étude

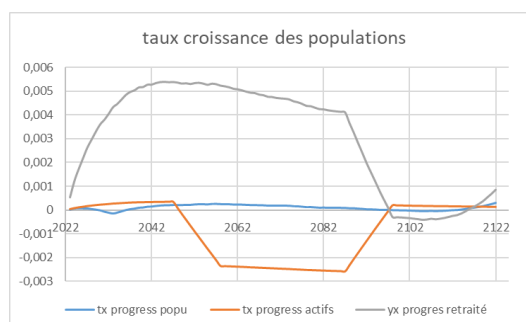


FIGURE 6.2.6 – Taux progression des groupes de populations si la naissance diminue et reste stable les 10 dernières années de l'étude

### 6.3 Annexe 3 : Ratio de solvabilité instantanée des différents ajustements

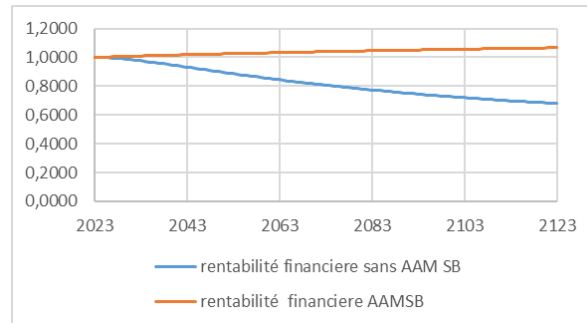


FIGURE 6.3.1 – Ratio de solvabilité pour l'ajustement du taux de cotisation

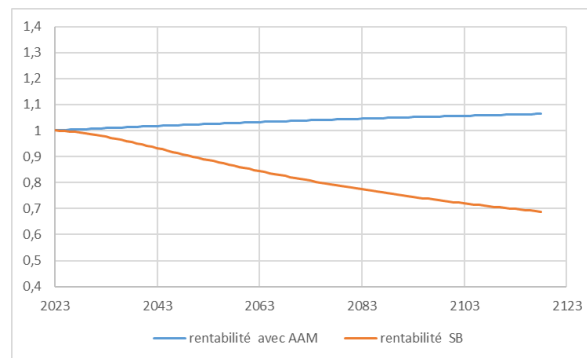


FIGURE 6.3.2 – Ratio de solvabilité pour l'ajustement du SFR

# Bibliographie

- [1] Organisation Mondiale de la Santé. (2019). **Statistiques mondiales sur la santé**
- [2] Nations Unies, Département des Affaires Économiques et Sociales, Division de la Population. (2019). **World Population Prospects 2019**
- [3] Commission Européenne. (2021). **The 2021 Ageing Report : Economic & Budgetary Projections for the EU Member States (2019-2070)**.
- [4] Thompson, L. (2020). **Inter-Generational Equity and Pension Systems**. Cambridge University Press.
- [5] Ayuso, M., & Bravo, J.M. (2022). **Indexing pensions to life expectancy : keeping the system fair across generations. MAF 2022**
- [6] Barr, N., & Diamond, P. (2008). The economics of pensions. *Oxford Review of Economic Policy*, 24(1), 15-39.
- [7] Ginn, J. (2003). *Gender, pensions and the lifecycle : How pensions need to adapt to changing family forms*. Policy Press.
- [8] Holzmann, R., & Jørgensen, S. (2001). Social risk management : A new conceptual framework for social protection, and beyond. *International Tax and Public Finance*, 8(4), 529-556.
- [9] Orszag, P.R., & Stiglitz, J.E. (2001). Rethinking pension reform : Ten myths about social security systems. In *New Ideas about Old Age Security* (pp. 17-56). World Bank.
- [10] Bodie, Z. (1990). Pensions as retirement income insurance. *Journal of Economic Literature*, 28(1), 28-49.
- [11] Clark, G.L., Munnell, A.H., & Orszag, J.M. (2006). The future of pensions in the United States. *Oxford Review of Economic Policy*, 22(1), 77-95.
- [12] Tragaki Alexandra. Le système de retraite et l'équité intergénérationnelle. In : *Économie & prévision*, n°136, 1998-5. pp. 107-116.
- [13] Bravo, JM, Ayuso, M., Holzmann, R., Palmer, E. : Équité actuarielle intergénérationnelle lorsque la longévité augmente : modification de l'âge de la retraite, pp. (Documents de

travail du CESifo ; n° 9408). Société munichoise pour la promotion de la recherche économique - CESifo GmbH (2021b). <https://ssrn.com/abstract=3961911>

[14] Ayuso, M., Bravo, J.M., Holzmann, R., Palmer, E. : Automatic indexation of pension age to life expectancy : when policy design matters. *Risks* 9(5), 96 (2021). <https://doi.org/10.3390/risks9050096>

[15] Professeur **Pierre DEVOLDER**, LACTU2040 financement de pension retraite, page 161-170.

[16] **Belise INAMAHORO, Marcel Heritier KAMBALE K**(2021). TP Cours d'Actuariat de l'Assurance-Vie :Estimation et lissage de tables de mortalités statiques et dynamiques par les méthodes de Whittaker-Henderson, logit, Poisson et de Gompertz-Makeham