

Faculté des sciences

Valorisation des passifs d'assurance vie sous les risques de longévité et d'investissement

Auteur-es : Achile KOUHAM FONING'UY

Promoteur-rices : Pierre DEVOLDER

Lecteur-rices : Pierre ARS

Année académique 2020-2021

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements au corps professoral et administratif de la LSBA pour m'avoir fait part de leur savoir et disponibilité tout au long de mon parcours académique. Singulièrement, j'adresse mes remerciements à mon promoteur Professeur Pierre DEVOLDER, pour l'accompagnement dans la réalisation de ce travail de par ses précieux conseils, sa disponibilité et sa patience.

Au terme de ce parcours académique, je tiens à remercier toute ma famille et plus particulièrement ma maman Mme HOMSI pour leur soutien incommensurable. Leurs attentions et encouragements m'ont accompagné tout au long de ce parcours académique.

Aussi, j'adresse mes remerciements à mes camarades et aînés académiques pour les discussions édifiantes et à tous ceux de près ou de loin qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Je ne saurai terminer sans exprimer toute ma gratitude à mon Dieu qui m'a accordé entre autres la santé et l'intelligence nécessaires pour mener jusqu'au bout ce travail.

Résumé

La bonne valorisation du passif d'assurance est capitale pour la pérennité de toutes compagnies d'assurance. L'assureur doit par conséquent connaître les risques liés à son portefeuille d'assurés afin de bien mesurer ses engagements.

L'objectif dans ce travail est donc de mesurer l'impact sur la valeur du passif d'assurance, plus précisément sur les taux de participation bénéficiaire à promettre à chaque assuré en vie à la maturité du contrat en fonction des risques pris en compte. En effet, appliquant l'étude sur un capital différé et considérant le risque lié à l'évolution du taux d'intérêt et de l'actif appelé risque d'investissement ou risque financier, le risque lié à la taille du portefeuille appelé risque diversifiable et le risque lié à l'évolution de la mortalité dans le portefeuille appelé risque non diversifiable, il est question de mesurer l'impact de la combinaison de ces risques sur le taux de participation bénéficiaire à accorder à chaque assuré. La problématique est de savoir comment valoriser le passif d'assurance suivant les risques considérés.

Pour répondre à cette problématique, il a fallu tout d'abord passer par deux chapitres intermédiaires dont l'un porte sur la configuration du modèle et l'autre sur les modèles financiers et de mortalité. Ensuite il s'est agi de la valorisation proprement dite et enfin de son application à un capital différé. Les résultats révèlent qu'il y a un impact significatif de la présence conjointe du risque financier et du risque non diversifiable. Le fait que la mortalité s'améliore au cours du temps fait aussi augmenter progressivement le passif d'assurance. Il est donc important pour l'assureur d'en tenir compte lors de la signature du contrat en étant très prudent sur le taux de participation bénéficiaire qu'il accorde.

abstract

The proper valuation of insurance liabilities is crucial for the sustainability of all insurance companies. Therefore, the insurer must know the risks related to its portfolio of insured persons to measure its commitments correctly.

Accordingly, this work aims to measure the impact on the value of insurance liabilities, more precisely on the profit-sharing rates to be promised to each survivor at the maturity of the contract according to the risks taken into account. Applying the study on deferred capital, considering the risk related to the evolution of the interest rate and the asset called investment risk or financial risk, the risk related to the portfolio's size is called diversifiable risk. The risk related to the evolution of mortality in the portfolio called non-diversifiable risk is a question of measuring the impact of the combination of these risks on the profit-sharing rate to be granted to each insured. The problem is to know how to value the insurance liabilities according to the risks.

It was first necessary to go through two intermediate chapters, one of which deals with the model's configuration and the other with financial and mortality models to answer this question. Then it was a matter of the valuation itself and eventually of its application to deferred capital. The results show a significant impact of the joint presence of financial risk and non-diversifiable risk. The fact that mortality improves over time also gradually increases insurance liabilities. Therefore, the insurer needs to consider the profit-sharing rate it grants and be careful signing contracts.

Table des matières

Remerciements	I
Résumé	II
abstract	III
Liste des tableaux et figures	VI
Introduction	1
1 Configuration du modèle	3
1.1 Structure du contrat	3
1.2 Modélisation du risque biométrique	6
1.3 Modélisation du risque de portefeuille	8
2 Modèles financiers et modèles de mortalité	10
2.1 Modèles financiers	10
2.1.1 Modélisation du taux d'intérêt : Modèle de Vasicek	11
2.1.2 Modélisation des classes d'actifs	14
2.2 Modèles de mortalités	15
2.2.1 Modèle de mortalité statique : Le modèle de Gompertz	15
2.2.2 Modèle de mortalité stochastique : Le modèle de Hull & White	16
3 Valorisation du passif d'assurance	18
3.1 Valorisation du passif sous le risque purement financier	18
3.2 Valorisation du passif sous le risque financier et le risque diversifiable	21
3.3 Valorisation du passif sous le risque financier et le risque non diversifiable	24
3.4 Valorisation du passif sous le risque financier le risque diversifiable et le risque non diversifiable	26
4 Calibrations et applications numériques	29
4.1 Calibrations	29
4.1.1 Calibration des paramètres du taux d'intérêt : modèle de Vasicek	29
4.1.2 Calibration des paramètres de l'action	32
4.1.3 Calibration des paramètres du taux d'instantané de mortalité : modèle Gompertz	34
4.1.4 Calibration des paramètres du taux d'instantané de mortalité : modèle de Hull & White	35

4.2	Applications numériques	36
4.2.1	Cas 1 : Détermination des taux de participations bénéficiaires en présence du risque purement financier	37
4.2.2	Cas 2 : Détermination des taux de participations bénéficiaires en présence du risque financier et du risque diversifiable	37
4.2.3	Cas 3 : Détermination des taux de participations bénéficiaires en présence du risque financier et du risque non diversifiable	38
4.2.4	Cas 4 : Détermination des taux de participations bénéficiaires en présence du risque financier, du risque diversifiable et du risque non diversifiable	38
4.2.5	Interprétation des résultats	39
	Conclusion	40

Liste des tableaux

1.0.1 Bilan simplifié de la compagnie d'assurance	3
4.1.1 Estimation des paramètres du modèle de Vasicek	30
4.1.2 Paramètres estimés de l'actif	33
4.1.3 Paramètres Estimés du taux instantané de mortalité du modèle de Gompertz	35
4.1.4 Paramètres Estimés du taux instantané de mortalité du modèle de Gompertz	36
4.2.1 Données des portefeuilles	37
4.2.2 Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d'un portefeuille d'assurés soumis au risque purement financier.	37
4.2.3 Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d'un portefeuille d'assurés en présence du risque financier et du risque diversifiable pour 40 assurés.	38
4.2.4 Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d'un portefeuille d'assurés en présence du risque financier et du risque diversifiable pour 80 assurés.	38
4.2.5 Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d'un portefeuille d'assurés en présence du risque financier et du risque non diversifiable.	38
4.2.6 Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d'un portefeuille d'assurés en présence du risque financier, du risque diversifiable et du risque non diversifiable pour 40 assurés.	39
4.2.7 Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d'un portefeuille d'assurés en présence du risque financier, du risque diversifiable et du risque non diversifiable pour 80 assurés.	39

Table des figures

4.1.1 Évolution du Treasury Yield 10 Years du 05 mars 2019 au 05 mars 2020	30
4.1.2 Évolution des taux d'intérêt au cours de 25 années.	31
4.1.3 Évolution des taux d'intérêt moyens vers le taux d'intérêt moyen.	32
4.1.4 Évolution journalière de l'indice "BEL-20" du 05 Mars 2019 au 05 Mars 2020	32
4.1.5 100 trajectoires de $S(t)$ pour $S(0)=3641.14$	34
4.1.6 Courbe de la probabilité de survie avec le modèle de Gompertz	35
4.1.7 Courbe de la probabilité de survie avec le modèle de Gompertz	36
4.2.1 Taux d'intérêt journaliers de la période du 05/03/2019 au 05/03/2020	IX
4.2.2 Cotations journalières de l'indice "BEL 20" du 05/03/2019 au 05/03/2020	X

Introduction

La valorisation du passif dans une compagnie d'assurance requiert la connaissance des risques auxquels celle-ci fait face. Pour ce qui est de l'assurance-vie, les produits actuellement les plus commercialisés en Belgique sont ceux de la branche 23 qui regroupent tous les produits d'épargne à moyen ou long terme sous forme de contrats d'assurance-vie liés à des fonds de placement et ceux de la branche 21 qui regroupent les assurance-vie (vie, décès et mixte). Concernant les produits d'assurance branche 21, ils peuvent se vendre avec ou sans participation au bénéficiaire et un rendement garanti. Il faut dire que l'évolution du monde médical en terme de progrès dans le domaine de la santé et la conjoncture économique avec les taux d'intérêts historiquement bas amènent à évaluer de façons différentes le passif d'assurance vie selon les critères relatifs aux risques encourus par l'assureur, la structure du contrat, les hypothèses de calcul. En effet, l'amélioration de la mortalité est visible de nos jours et c'est une réalité à prendre en compte par les assureurs. Au cours des dernières décennies, la volatilité croissante des rendements des placements, conjuguée à la faiblesse des régimes de taux d'intérêt et à l'augmentation de l'espérance de vie dans tous les pays développés, a eu des répercussions sur les marchés de l'assurance-vie et des pensions, ce qui pourrait causer des difficultés pour certains assureurs d'honorer leurs engagements. L'adoption de normes comptables fondées sur la juste valeur pour les assureurs, mise en œuvre dans le cadre de Solvabilité II dans l'union européenne en 2016, a amélioré la transparence de leurs bilans en liant la valeur des actifs et celle des passifs au prix réel (ou hypothétique) auquel ils pourraient être échangés sur un marché liquide. Les traditionnels produits d'assurance vie offrant un capital fixe ont été remplacés depuis longtemps par des structures contractuelles plus compétitives, avec des bénéficiaires au Royaume-Uni et des participations en Europe et aux États-Unis, où les assureurs partagent une partie de leur rendement avec les titulaires de polices. Habituellement, on promet au titulaire de la police de recevoir un rendement minimum. Ce taux de rendement minimum est fixé à l'émission sur une base très conservatrice, de sorte que la valeur implicite d'une telle garantie est faible. Toutefois, compte tenu de la nature à long terme du contrat, les garanties de taux qui sont initialement loin d'être suffisantes au regard des primes perçues, peuvent devenir très précieuses en raison des mouvements défavorables du marché des taux de rendement et l'augmentation inattendue de la durée de vie. L'augmentation du coût de ces produits en conséquence de ces garanties pourrait devenir insoutenable et, à terme, compromettre la viabilité financière de l'entreprise. Il est donc essentiel de concevoir un contrat précis et d'évaluer soigneusement tous les risques encourus, ainsi que l'interaction entre eux.

Selon les travaux pionniers de E. BRICS et F. De VARENNE [10], portant sur l'évaluation des engagements de l'assureur dans le cadre des produits d'assurance avec participations bénéficiaires, il faut prendre en compte quatre types de risques : le risque lié à la performance des actifs, le risque lié à l'évolution des taux d'intérêt, le risque lié à l'effet de levier et le risque de défaut [10]. Ils montrent entre autres que plus les assurés ont contribué pour la constitution des actifs par le paiement des primes d'assurance, plus le taux de participation augmente et que si le taux garanti baisse pour un

même niveau de volatilité alors le taux de participation bénéficiaire augmente également.

Plus tard, partant de ces travaux, A. Bacinello, P. Millosovich et A. Chen [11] vont concevoir un contrat en considérant trois composantes dans les engagements de l'assureur : le capital promis par l'assureur à tout assuré en vie à la maturité du contrat, le montant éventuel de participation bénéficiaire qu'il pourrait recevoir et la perte probable qu'il pourrait avoir en cas de faillite. Il peut également donner lieu à trois types de produits à savoir : les rentes viagères, les options de rentes et un capital différé. Ils vont considérer la présence conjointe du risque financier et du risque biométrique. Le risque biométrique lui se compose du risque diversifiable et du risque non diversifiable. Ils arrivent à la conclusion principale que le taux de participation bénéficiaire promis aux assurés doit être prudent car la longévité s'améliore au cours du temps et par conséquent cela augmente les engagements de l'assureur. Autrement dit, les engagements réels de l'assureur sont plus élevés que ce qu'il ne souhaite s'il néglige le risque biométrique.

L'essentiel de ce travail s'appuiera sur l'article de A. Bacinello, P. Millosovich et A. Chen [11]. L'objectif sera de mettre en lumière cet impact sur les engagements de l'assureur pour un capital différé. Arrivera-t-on à la même conclusion qu'eux sachant que le taux d'intérêt considéré est stochastique et que l'amélioration de la mortalité se base sur les travaux de F. Zeddouk et P. Devolder [12] ? Pour le mesurer, l'attention sera portée sur la variation du taux de participation bénéficiaire en fonction des risques pris en compte.

La conduite de ces travaux se fera en quatre chapitres à savoir : la configuration du modèle, les modèles financiers et de mortalité, la valorisation du passif selon les risques considérés et enfin les calibrations et applications numériques.

Chapitre 1

Configuration du modèle

Le modèle est construit à partir du bilan simplifié d'une entreprise d'assurance. Au temps $t=0$, il se présente comme suit :

Actifs	Passifs
A_0	$E_0 = (1 - \alpha)A_0$ $L_0 = \alpha A_0$
A_0	A_0

TABLE 1.0.1 – Bilan simplifié de la compagnie d'assurance

- A_0 la valeur des actifs au moment de la signature du contrat ;
- α compris entre 0 et 1 représente la part des contributions du groupe homogène des assurés, de taille N_0 , de même âge et ayant la même prestation garantie ;
- $1 - \alpha$ représente les contributions des actionnaires de la compagnie d'assurance pour la constitution des actifs initiaux ;
- L_0 représente le passif de l'assureur (primes qui lui sont versées par les assurés) au moment de la signature du contrat ;
- E_0 représente les fonds propres de la compagnie d'assurance au moment de la signature du contrat.

Ce tableau permet de comprendre en d'autres mots que les actifs initiaux de la compagnie d'assurance A_0 sont financés à la fois par deux groupes à savoir : les assurés avec une proportion de α des actifs initiaux et les actionnaires avec une proportion de $1 - \alpha$ des actifs initiaux. Il est la base de la construction du contrat qui sera utilisé dans ce travail.

1.1 Structure du contrat

Le contrat est structuré autour de plusieurs suppositions. Les produits d'assurance vendus aux assurés sont tels que moyennant le paiement d'une prime individuelle identique à la signature du contrat ils peuvent recevoir à maturité T de la part de l'assureur une prestation individuelle identique si et seulement si ils sont en vie. De plus, il est supposé que la compagnie d'assurance ne contracte plus d'autre dette, n'augmente pas de capital et ne verse pas de dividendes aux actionnaires avant

l'échéance du contrat. Comme la répartition des bénéfices est une caractéristique commune à de nombreux contrats d'assurance vie, il est considéré la version d'une police avec participation bénéficiaire. Les notations L et $A = A_0 e^{Rt}$ représentent respectivement le passif total et la valeur de l'actif au moment T , où R est le logarithme du rendement de l'actif sur la période $[0, T]$. À l'échéance, les engagements totaux que la compagnie d'assurance doit honorer dépendent du nombre N des assurés vivants :

$$L = \begin{cases} \Psi & \text{si } N > 0 \\ 0 & \text{si } N < 0 \end{cases} = \Psi \cdot 1_{\{N > 0\}}$$

L'expression $1_{\{N > 0\}}$ représente l'indicateur de l'évènement $N > 0$. Au pire des cas lorsque le nombre d'assurés à maturité est $N = 0$, cela signifie qu'aucun assuré n'a survécu à maturité et que les engagements de l'assureur sont nuls ($L = 0$). D'autre part si $N > 0$, les engagements de l'assureur dépendent à la fois de la valeur de l'actif en maturité A et de valeur total G du montant garanti à chaque assuré en vie et défini comme suit :

$$\Psi = \begin{cases} A & \text{si } A < G & \text{cas 1} \\ G & \text{si } \alpha G \leq \alpha A \leq G & \text{cas 2} \\ G + \beta(\alpha A - G) & \text{si } G < \alpha A & \text{cas 3} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Chaque valeur possible du passif à maturité traduit la situation dans laquelle peut se trouver la compagnie d'assurance :

- cas 1 : La valeur total de son actif ne lui permet pas de payer la prestation garantie à tous les assurés et donc d'envisager le paiement d'une participation bénéficiaire. L'assureur va donc verser A et va être simultanément en défaut de paiement : c'est une situation de faillite. Dans la pratique, ce cas est rare car il y a la présence des organes de contrôles tant sur le plan national que international qui s'assurent qu'au cours du temps, toute entreprise d'assurance est prête à faire face à ses engagements. Le but étant de protéger les assurés et de maintenir la stabilité du système financier.
- cas 2 : La valeur des primes versées par les assurés permet à l'assureur de couvrir ses prestations à leur endroit. A maturité, l'assureur donne donc la prestation promise à chaque assuré en vie tout en perdant une partie de son investissement initial.
- cas 3 : L'assureur a été très prudent. Il peut avoir sous estimé le nombre de décès à l'échéance (plus d'assurés qu'attendu par l'assureur sont décédés) ou l'évolution du taux d'intérêt (le taux d'intérêt du marché supérieur au taux d'intérêt garanti) : ce sont les deux sources de gains de l'assureur lorsqu'il vend ce type de produit. Ainsi, en plus du montant garanti à chaque assuré, il leur verse une participation bénéficiaire donc le taux est fixé à la signature du contrat. Elle représente le pourcentage (δ) de la différence entre la valeur totale des primes et des prestations à maturité versé aux assurés : c'est le partage des bénéfices entre les deux parties.

De façon équivalente, l'expression (2.1.1) s'écrit comme suit :

$$\Psi = G + \beta \max(\alpha A - G, 0) - \max(G - A, 0) \quad (1.1.2)$$

A partir de l'expression (2.1.1) trois composantes peuvent être identifiées : la garantie stochastique G , le gain d'une option d'achat et celui d'une option de vente qui peuvent correspondre respectivement à des options call et put européens puisque l'assureur ne preste qu'à maturité. Les deux options sont émises sur les actifs de l'entreprise et ont un prix d'exercice stochastique en fonction de G . L'option d'achat correspond au paiement d'un bonus terminal et est généralement désignée sous le nom de l'option bonus. L'option de vente à découvert résulte du fait que les actionnaires ont une responsabilité limitée et est généralement connue comme l'option par défaut. Autrement dit pour satisfaire aux engagements envers les assurés, il peut arriver que uniquement le capital investi par les assureurs dans la compagnie d'assurance soit utilisé à cette fin. Il convient de noter que le gain global G garanti aux assurés survivants est stochastique puisqu'il est proportionnel à N :

$$G = N \cdot B$$

Où la prestation individuelle garantie B peut dépendre d'autres facteurs financiers ou démographiques et peut donc être également aléatoire. En spécifiant convenablement G (c'est-à-dire B), on obtient différents types de prestations payables en cas de survie. B peut se définir comme suit :

$$(a) \quad B = b \quad (1.1.3)$$

$$(b) \quad B = bj a_T \quad (1.1.4)$$

$$(c) \quad B = b + \max(bj^g a_T - b, 0) = b \max(1, j^g a_T) \quad (1.1.5)$$

- Le cas (a) caractérise le produit d'assurance appelé assurance capital différé. Ici, la garantie G est fixe et la prestation individuelle B est donc déterministe. Nous pourrions aussi envisager une prestation stochastique dépendant de la valeur de l'actif ou d'une variable liée au marché.
- Le cas (b) représente le produit d'assurance appelé rente viagère différée garantissant à chaque survivant la prestation B en continu au taux annuel j , à partir du moment T jusqu'à son décès. La quantité a_T est le prix de la rente à la date T d'une rente viagère entière stipulant les paiements continus à taux unitaire pour un assuré alors âgé de $x + T$. Si le marché était déterministe, du point de vue de l'évaluation, le contrat aurait pour effet d'être équivalent à celui décrit au cas (a).
- Le cas (c) décrit un produit capital différé auquel est attaché une option de rente viagère garantie. Il s'agit de contrats qui donnent aux assurés le droit de convertir, à l'échéance, une prestation de survie en une rente à un taux de conversion fixe j^g . Sous réserve de survie, l'option est exercée si la prestation b (spécifiée comme dans le cas (a)) est inférieure à la valeur marchande $bj^g a_T$ de la rente annuelle garantie. En effet, en cas d'exercice de l'option, le preneur d'assurance recevra une rente viagère immédiate et continue donc le montant de paiement annuel est au taux bj^g . Alternativement, la prestation individuelle peut être décomposée en une rente viagère différée, comme dans le cas (b), rendant les paiements au taux de $b\rho^g$ et, en plus, la possibilité de racheter le contrat à temps T .

La prestation individuelle résumant ces trois cas de figures peut être réécrite comme suit :

$$B = bj^g a_T + \max(b - bj^g a_T, 0)$$

Si l'option de rachat est exercée, le preneur d'assurance reçoit un montant en espèces égal à b (valeur de rachat).

Bien que dans les cas (b) et (c) les paiements pourraient avoir lieu après T , la solvabilité et la répartition

des bénéfiques ne sont évaluées qu'à la date d'échéance en comparant les valeurs de marché des actifs et des passifs.

La rémunération des actionnaires à l'échéance est donnée par la différence entre la valeur des actifs et des passifs à maturité :

$$A - L = A1_{\{N=0\}} + \max(A - G, 0)1_{\{N>0\}} - \beta \max(\alpha A - G, 0)1_{\{N>0\}} \quad (1.1.6)$$

Il est pratique, surtout lorsqu'on analyse des portefeuilles larges, de considérer les quantités au niveau individuel, plutôt que global. Comme les assurés sont homogènes en termes de prestations, l'engagement individuel à l'échéance T attribué à l'assuré i est défini par :

$$l^i = \frac{L}{N} 1_{\{\tau^i > T\}} = \frac{\Psi}{N} 1_{\{\tau^i > T\}} = \psi 1_{\{\tau^i > T\}} \quad i = 1, \dots, N_0, \quad (1.1.7)$$

où τ^i désigne sa durée de vie résiduelle. En particulier, le passif attribué à chaque assuré survivant au moment T est alors égal à :

$$\psi = B + \beta \max(\alpha w - B, 0) - \max(B - w, 0)$$

Où $w = \frac{A}{N}$ lorsque $\{N > 0\}$. L'interprétation des trois composantes du passif reste inchangée si l'on considère comme sous-jacent la part individuelle w de l'actif total concernant chaque assuré survivant et, dans le prix d'exercice, les prestations individuelles B au lieu du gain global G. Bien entendu, l'addition des engagements individuels permet de retrouver l'engagement total :

$$L = \sum_{i=1}^{N_0} l^i$$

Dans la suite du travail, la prestation choisit sera $B = b$ car le produit choisit dans le cadre de ce travail est un capital différé.

1.2 Modélisation du risque biométrique

Le risque d'assurance affectant le portefeuille homogène d'assurés résulte de la possibilité d'écarts entre les taux de mortalité obtenus et les taux de mortalité attendus. Comme c'est le cas pour les portefeuilles d'investissement, ce risque peut être divisé en deux composantes.

La première composante est donnée par le risque diversifiable. Cette diversification est possible lorsque la taille du portefeuille d'assurance est infinie : c'est la loi des grands nombres. En d'autres termes, cette composante du risque a tendance à disparaître pour les portefeuilles suffisamment larges. En effet, N est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ; ce qui permet d'écrire :

$$P(N = n) = \binom{N_0}{n} (1 - q_x)^n q_x^{N_0 - n} \quad (1.2.1)$$

Où q_x la probabilité de décéder supposée connue.

La moyenne et la variance de N sont respectivement :

$$E(N) = N_0(1 - q_x) \quad (1.2.2)$$

$$Var(N) = N_0 q_x (1 - q_x) \quad (1.2.3)$$

En calculant la variance de la proportion réelle de survivants ($\frac{N}{N_0}$) et en déterminant sa limite à l'infini, on constate qu'elle tend vers 0 : c'est l'effet de la diversification.

$$\begin{aligned}\lim_{N_0 \rightarrow +\infty} \text{var}\left(\frac{N}{N_0}\right) &= \lim_{N_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_0^2} N_0 q_x (1 - q_x) \\ &= \lim_{N_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{N_0} q_x (1 - q_x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Dans le cas où la taille du portefeuille est finie, il y a la présence du risque non diversifiable.

La deuxième composante est plutôt donnée par un risque qualifié de systématique qui frappe tous les assurés du portefeuille au même moment. Dans le présent travail, Il s'identifie au risque de longévité, c'est-à-dire le risque d'une baisse générale et imprévue des taux de mortalité. Lorsqu'il est présent, même avec un portefeuille important, il y a une partie résiduelle de risque qui ne peut pas être éliminée.

Le nombre de personnes vivantes dans le groupe au moment T est alors donné par :

$$N = \sum_{i=1}^{N_0} 1_{\tau^i > T} \quad (1.2.4)$$

Ce nombre de survivants à maturité pourra selon la situation s'exprimer de plusieurs façons. Conditionnellement à $\mu_x(t)$ dans le cas où la mortalité est stochastique il suit une distribution binomiale s'écrivant de la manière suivante :

$$N \sim \text{Bin}(N_0, {}_T\bar{P}_X) \quad (1.2.5)$$

avec ${}_T\bar{P}_X = e^{-\int_0^T \mu_x(t) dt}$ la probabilité pour l'assuré d'âge x d'être en vie à maturité en tenant compte du risque de longévité.

Hypothèse 1 : Conditionnellement à $\mu_x(t)$, les durées de vie résiduelles i , $i = 1, \dots, N_0$ sont indépendantes et

$$\begin{aligned}P(\tau^1 > t_1, \dots, \tau^{N_0} > t_{N_0} / \mu_x(t)) &= \prod_{i=1}^{N_0} P(\tau^i > t_i / \mu_x(t)) \\ &= \prod_{i=1}^{N_0} e^{-\int_0^{t_i} \mu_x(t) dt}\end{aligned}$$

Pour tout $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N_0$.

Hypothèse 2 : Le taux instantané de mortalité $\mu_x(t)$ affecte toutes les durées de vie en même temps et peut donc être interprété comme un risque systématique. Il n'est connu qu'à la maturité T du contrat. Bien que sa valeur ne soit pas connue à la date d'évaluation (moment 0), il est révélé aux participants au marché au temps T. Autrement dit, l'information sur le risque démographique accumulé en observant l'expérience de mortalité dans ce portefeuille et des portefeuilles semblables et/ou au niveau de

la population nationale permet aux assureurs de résoudre l'incertitude relative au risque systématique relatif à cette cohorte spécifique de personnes. Ce paramétrage statique et relativement simple pourrait être étendu à un modèle stochastique dynamique de mortalité qui serait mis à jour à mesure que de nouvelles informations deviennent disponibles.

1.3 Modélisation du risque de portefeuille

Pour représenter un portefeuille comportant un grand nombre d'assurés homogènes, le modèle de risque d'assurance introduit dans la section précédente est considéré car la taille du portefeuille diverge. Plus précisément, il est supposé avoir une infinité d'assurés et, conformément à la notation précédente, τ^i désigne la durée de vie résiduelle du $i^{\text{ème}}$ preneur d'assurance. La mesure réelle P , du point de vue du risque, contient désormais un ajustement pour risque systématique uniquement, car la taille du portefeuille est importante et le risque de mortalité non systématique a été diversifié.

Pour chaque sous-portefeuille fini N_0^f de N_0 , la structure de contrat et le capital sont les mêmes que ceux introduits précédemment. En particulier, l'actif initial A_0 et le montant total des primes L_0 dépendent de N_0^f . Il s'ensuit que toutes les quantités dérivées des actifs et des primes telles que les passifs individuels et globaux, le ratio de levier et la valeur des actifs au moment T dépendent également de la taille du sous-portefeuille.

La définition de N reste celle donnée en (2.2.4) et on fournit maintenant le nombre de survivants au moment T dans les sous-portefeuilles d'assurés avec l'indice $i = 1, \dots, N_0$. Pour chaque sous-portefeuille N_0^f l'hypothèse 1 et l'hypothèse 2 demeurent aussi. Sous P , on a alors infiniment les temps restant de vie aléatoires τ^i , $i = 1, 2, \dots$, qui sont indépendants connaissant $\mu_x(t)$. Il s'ensuit que :

$$\frac{N}{N_0} \longrightarrow T\bar{P}_X \quad \text{lorsque} \quad N_0 \longrightarrow +\infty \quad (1.3.1)$$

Avec un portefeuille infini, cela fait du sens de considérer les quantités au niveau individuel uniquement. L'engagement envers un preneur d'assurance pour un grand portefeuille peut alors être défini en prenant la limite de l'expression (2.1.3) lorsque $N_0 \longrightarrow +\infty$. Pour ce faire, il est nécessaire de formuler une hypothèse sur la manière dont les exigences de capital et les primes de notation se comportent lorsque la taille du portefeuille augmente. Soit $a_0 = \frac{A_0}{N_0}$ et $l_0 = \frac{L_0}{N_0}$ les actifs individuels par contrat et la prime unique individuelle respectivement.

Hypothèse 3 : Comme $N_0 \longrightarrow +\infty$,

$$a_0 \longrightarrow a_0(\infty) \quad \text{positif et fini} \quad (1.3.2)$$

$$l_0 \longrightarrow l_0(\infty) \leq a_0(\infty) \quad (1.3.3)$$

Il est naturel de s'attendre à ce que, dans un portefeuille fini, les actifs initiaux par contrat a_0 diminuent avec N_0 , puisqu'ils doivent couvrir non seulement le passif individuel attendu mais aussi ses fluctuations. Ensuite, l'hypothèse 3 signifie que, lorsque le portefeuille est assez important pour que la mise en commun soit pleinement efficace, les actifs par contrat et la prime individuelle unique se stabilisent autour de valeurs asymptotiques représentant les actifs individuels et la prime individuelle requise dans un grand portefeuille. L'inégalité $l_0(\infty) \leq a_0(\infty)$ sera stricte chaque fois que, comme dans notre cas, il existe un risque systématique. Le capital supplémentaire $a_0(\infty) - l_0(\infty)$ constitue alors un tampon pour couvrir l'impact de ce risque.

Le cas $l_0(\infty) \leq a_0(\infty)$ pourrait se produire dans un grand portefeuille sans risque d'assurance systématique en raison du risque financier systématique. Il découle également de l'hypothèse 3 que :

$$\alpha = \frac{L_0}{W_0} \Rightarrow \alpha(\infty) = \frac{l_0(\infty)}{w_0(\infty)} \leq 1 \quad (1.3.4)$$

La fraction $\alpha(\infty)$ représente le ratio de levier pour un assureur qui soutient un portefeuille important. Sous l'hypothèse 3, l'engagement de l'assureur envers chaque assuré i dans le cas d'un portefeuille important est donné, sur l'ensemble $\tau^i > T$, par :

$$\begin{aligned} l^i(\infty) &= \lim_{N_0 \rightarrow +\infty} l^i \\ &= b + \beta \alpha(\infty) \left[\frac{A_0(\infty)e^R}{N} - \frac{b}{\alpha(\infty)} \right]^+ - \left[b - \frac{A_0(\infty)e^R}{N} \right]^+ \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Si aucun risque d'assurance systématique n'affecte le portefeuille de sorte que le taux instantané de mortalité est déterministe, alors, par la loi des grands nombres,

$$\frac{N}{N_0} \rightarrow {}_T P_x \quad \text{lorsque} \quad N_0 \rightarrow +\infty$$

presque sûrement.

Chapitre 2

Modèles financiers et modèles de mortalité

Ce chapitre, est utile pour introduire les outils nécessaires pour l'évaluation de notre passif d'assurance et par conséquent le taux de participation octroyé aux assurés. D'une part, ces outils concernent les modèles financiers qui se composent du modèle de taux d'intérêt et des modèles des actifs considérés. D'autre part, il s'agit des modèles de mortalité qui se composent d'un modèle de mortalité déterministe et d'un modèle de mortalité stochastique.

2.1 Modèles financiers

Les hypothèses de marchés financiers décrites par P. Devolder 2018 [2] sont celles considérées ci-dessous. Le marché financier doit respecter les conditions suivantes :

- Le marché est supposé parfait :
 - Aucun investisseur n'est dominant (informations complètes sur le marché)
 - Les investisseurs sont rationnels ;
 - Les titres sont infiniment divisibles ;
 - Pas de coût de transactions ;
 - Pas de taxes ;
 - Pas de restrictions sur crédit.
- Existence d'un titre sans risque de rendement certain r :

La tarification se fait sous la mesure risque neutre Q et sous cette mesure, le rendement de l'actif risqué est égal au taux sans risque r . Il peut être constant ou aléatoire. Dans ce travail, il est considéré comme aléatoire et par conséquent il faudra calibrer ses paramètres.

- Absence d'opportunités d'arbitrage

Dans un tel marché, l'hypothèse faite est qu'il n'est pas possible d'obtenir un gain strictement positif avec une probabilité strictement positive pour un investissement nul.

2.1.1 Modélisation du taux d'intérêt : Modèle de Vasicek

Lorsque les taux d'intérêt sont aléatoires, nous devons les modéliser. Plusieurs modèles ont vu le jour et sont pertinents pour l'usage selon l'objectif suivi. L. Martellini et P. Priaulet [2004] présentent le modèle de taux idéal comme celui qui respecte les critères suivants :

- Réaliste en ce sens qu'il permet de prendre en compte les propriétés empiriques de la courbe des taux qui sont :
 - Les taux d'intérêt ne sont pas négatifs (critère non pertinent aujourd'hui car c'est possible de trouver des taux d'intérêts négatifs sur le marché financier);
 - Les taux d'intérêt sont affectés par des effets de retour à la moyenne.
 - Les taux n'évoluent pas de façon parfaitement corrélée;
 - Les taux à court terme sont plus volatiles que les taux à long terme;
 - Facteurs : niveau, pente et courbure, sont à l'origine de plus de 95% des mouvements de la courbe des taux.
- Bien construit en ce sens que les inputs du modèle sont observables sur le marché ou facilement estimables, et en outre fréquemment réajustables;
- Compatible avec les prix de marché de produits dits «vanilles»;
- Suffisamment simple pour permettre des calculs rapides;
- Intuitif en ce sens que les manipulateurs du modèle (traders, contrôleurs de risque...) n'aient pas la sensation d'avoir une boîte noire entre les mains;
- Un modèle qui n'oublie pas un facteur de risque;
- Cohérent d'un point de vue théorique, c'est-à-dire satisfaisant l'absence d'opportunité d'arbitrage;
- Offrant une méthode de couverture du produit de taux qui permette au vendeur de dupliquer aisément le produit, et par conséquent de sécuriser tout au long de la vie du produit la marge dégagée initialement lors de la vente.

Nous pouvons catégoriser en trois classes de modèles les modèles de taux d'intérêts à savoir les modèles mono-factoriels, les modèles multifactoriels et les modèles HJM d'après P. Théron [4]. Dans le cadre de ce travail, un accent particulier est mis sur la première classe de modèles de taux d'intérêt et plus précisément sur celui de Vasicek qui sera utilisé en se basant sur le livre de F. Planchet, P. Thérond et J. Jacquemin, 2005 [1].

L'une des premières modélisations stochastiques des taux d'intérêts a été développée par Vasicek. Cette modélisation du taux instantané à court terme utilise le processus autorégressif dit d'Ornstein-Uhlenbeck défini comme suit sous la mesure risque réel P :

$$dr(t) = a_r(b_r - r(t))dt + \sigma_r dW_r(t) \quad (2.1.1)$$

Où

- r_t le taux d'intérêt continu instantané
- a_r la vitesse de convergence
- b_r le taux limite (valeur moyenne à long terme)
- σ_r la volatilité
- W mouvement brownien

En se référant au cours de P. Delvolder [2018][2], la solution de cette équation différentielle stochastique est donnée par :

$$r(t) = r(s)\exp(-a_r(t-s)) + b_r(1 - \exp(-a_r(t-s))) + \sigma_r \exp(-a_r(t-s)) \int_s^t \exp(a_r(u-s)) dW(u) \quad (2.1.2)$$

Le passage de la mesure réelle P à la mesure risque neutre Q est caractérisée par :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\lambda W_T - \frac{\lambda^2 T}{2}\right) \quad (2.1.3)$$

Où

$$\bar{W}_r(t) = W_r(t) - \lambda t \quad \Rightarrow \quad d\bar{W}_r(t) = dW_r(t) - \lambda dt \quad (2.1.4)$$

Avec $\bar{W}_r(t)$ un mouvement brownien standard et λ une constante positive représentant le prix marché du risque lié à la variation des taux d'intérêt. Donc (2.1.1) devient :

$$\begin{aligned} dr(t) &= a_r(b_r - r(t))dt + \sigma_r(\lambda dt + d\bar{W}_r(t)) \\ &= a_r\left(b_r + \frac{\lambda\sigma_r}{a_r} - r(t)\right)dt + \sigma_r(d\bar{W}_r(t)) \\ &= a_r(\bar{b}_r - r(t))dt + \sigma_r d\bar{W}_r(t) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

On voit donc que sous Q, le processus du taux court reste un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, de mêmes volatilité et vitesse de retour à la moyenne, mais de cible de retour à la moyenne (ou taux limite) modifiée. Sa solution est :

$$r(t) = r(s)\exp(-a_r(t-s)) + \bar{b}_r(1 - \exp(-a_r(t-s))) + \sigma_r \exp(-a_r(t-s)) \int_s^t \exp(a_r(u-s)) dW(u) \quad (2.1.6)$$

Ce modèle de Vasicek dit "déport normal" présente quelques avantages et inconvénients :

- Avantages

- Le modèle admet une solution explicite et donc une discrétisation exacte ;
- La simplicité du modèle fournit une expression analytique du prix des produits de taux standard comme les zéro coupons et obligations.
- Les calculs sont rapides d'un point de vue informatique
- Le modèle permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêt, correspondant aux observations empiriques. En effet, des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas.
- Le modèle n'exclut pas l'apparition des taux d'intérêt négatifs.

- Inconvénients

- Les différents paramètres du processus de diffusions sont constants.
- Ce modèle ne permet pas d'obtenir toutes les formes des courbes de taux notamment la courbe de taux en forme de cuvette.
- Le processus ne dépend que d'une variable d'état.
- Stabilise la queue de la structure des taux.
- Dans ce modèle il y a une incompatibilité des corrélations de taux avec les observations empiriques à cause de la présence d'un seul et unique facteur, le taux sans risque instantané.

2.1.2 Modélisation des classes d'actifs

En se basant sur le livre de F. Planchet, P. Thérond et J. Jacquemin, 2005 [1] le modèle de Black et Scholes est le modèle de référence pour la modélisation du cours des actions. Il repose sur quatre hypothèses qui sont la présence d'un actif risqué suivant un brownien géométrique (les mouvements possibles du prix tendent vers l'infini), la présence d'un actif non risqué de rendement constant continu sur r , le marché parfait et l'absence de distribution des dividendes de l'actif risqué avant la fin de la période considérée. Toutefois, même si les paramètres du modèle dépendent du temps, le raisonnement reste valable.

• Actif risqué

Typiquement, dans le modèle de Black et Scholes l'actif risqué est une action ou indice boursier. Il considère que le prix du titre risqué évolue sous la mesure réelle P selon :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma_s dW_s(t) \quad (2.1.7)$$

Avec

- S_t la valeur de l'action à la date t ;
- μ le rendement instantané de l'action ;
- σ_s l'écart type du rendement instantané de l'action ;
- W_s mouvement brownien standard sous la mesure risque réelle P .

Or, sous la mesure risque Q , le rendement de l'actif est égal au taux sans risque ($r(t)$). L'équation (2.1.7) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &= r(t)dt + \sigma_s \left(\frac{\mu - r(t)}{\sigma_s} dt + dW_s(t) \right) \\ &= r(t)dt + \sigma_s \left(\lambda_S dt + dW_s(t) \right) \\ &= r(t)dt + \sigma_s d\hat{W}_s(t) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Où λ_S est la prime de risque

La solution de cette équation est déterminée en appliquant le lemme d'ITO sur cette équation différentielle et on obtient :

$$S(T) = S(0)e^{-\int_0^T (r(t) - \frac{1}{2}\sigma_s^2)dt} + \sigma_s \hat{W}_s(T) \quad (2.1.9)$$

\hat{W} suit une loi normale $N(0, \sqrt{t})$.

- **Actif non risqué**

Le titre non risqué est représenté par un compte d'épargne $B(t)$. Dans le modèle de Black et Scholes, la dynamique sous la mesure de probabilité réelle P , est donnée par :

$$dB(t) = r(t)B(t)dt \quad (2.1.10)$$

En résolvant cette équation différentielle, nous aurons comme solution

$$B(t) = B(0)e^{-\int_0^t r(t)dt} \quad (2.1.11)$$

Le modèle de Black et Scholes a pour avantage d'être simple à utiliser (formule simple) et à simuler. Cependant il n'intègre pas les variations brutales du cours du sous-jacent dues à l'arrivée discontinue d'informations bonnes ou mauvaises.

- **Corrélation entre l'actif risqué et le taux d'intérêt**

Nous considérons que nos actifs initiaux sont uniquement les actifs risqués plus précisément des actions. Les risques financiers sont ceux dus à l'évolution des actifs et des taux d'intérêt noté r . Le taux de rendement des actifs risqués est supposé corrélé avec le taux d'intérêt.

Hypothèse 4 : En présence du risque de longévité, la valeur des actifs à maturité A est indépendante du temps de vie restant, mais corrélée avec le taux d'intérêt.

2.2 Modèles de mortalités

On distingue deux types de modèles de mortalités : les modèles de mortalités statiques qui considèrent que la mortalité à chaque âge est fixe et les modèles de mortalités stochastiques qui considèrent que la mortalité aux différents âges évolue au cours du temps.

2.2.1 Modèle de mortalité statique : Le modèle de Gompertz

Le modèle de Gompertz est un modèle de mortalité qui se base sur le fait que la cause de mortalité c est la maladie. Il est supposé que la mortalité croît de façon exponentielle avec l'âge. Sous ce modèle, le taux instantané de mortalité d'un individu âgé de X années au temps t s'écrit :

$$m(t) = \lambda c^{x+t} \quad 0 \leq t \quad (2.2.1)$$

D'où

$$\begin{aligned} {}_{T-t}P_{X+t} &= e^{-\int_t^T m(s)ds} \\ &= e^{-\lambda \int_t^T c^{x+s} ds} \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\ln c} [e^{(x+s) \ln c}]_t^T} \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\ln c} [c^{x+T} - c^{x+t}]} \end{aligned}$$

Avec

- λ un paramètre positif variant en fonction du niveau de mortalité,
- c un paramètre positif mesurant l'augmentation du risque de décès avec l'âge.

Ainsi pour $t = 0$, on a :

$${}_T P_X = e^{-\frac{\lambda}{\ln c} [c^{x+T} - c^x]} \quad (2.2.2)$$

2.2.2 Modèle de mortalité stochastique : Le modèle de Hull & White

Le modèle de Hull & White est une extension du modèle de Vasicek. Il peut se présenter de plusieurs façons. Dans ce mémoire, celui qui sera pris en compte est celui proposé par F. Zeddouk et P. Devolder, 2020 [12] :

$$d\mu_x(t) = (\xi(t) - b_\mu \mu_x(t))dt + \sigma_\mu dW_\mu(t)$$

Où

- b_μ est une constante positive correspondant à la vitesse de retour à la moyenne du taux instantané de mortalité,
- σ_μ est une constante positive correspondant à la volatilité du taux instantané de mortalité,
- ξ est une fonction positive déterministe dépendant du temps. Ce paramètre contrôle la moyenne long terme du taux instantané de mortalité,
- W_μ mouvement brownien standard.

Dans le but de tenir compte de l'amélioration de la mortalité, le paramètre de contrôle de la moyenne à long terme du taux instantané de mortalité est remplacé par la fonction classique de Gompertz qui exprime que le taux instantané de mortalité croît exponentiellement avec l'âge. Le modèle de Hull & White modifié devient :

$$d\mu_x(t) = b_\mu \left(\frac{A}{b_\mu} e^{Bt} - \mu_x(t) \right) dt + \sigma_\mu dW_\mu(t) \quad (2.2.3)$$

La solution de cette équation stochastique est :

$$\mu_x(t) = \mu_x(s) b_\mu e^{-b_\mu(t-s)} + \frac{A}{b_\mu + B} (e^{Bt} - e^{Bs - b_\mu(t-s)}) + \sigma_\mu e^{-b_\mu t} \int_s^t e^{b_\mu u} dW_\mu(u) \quad (2.2.4)$$

Comme ce modèle est affine, la probabilité de survie s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} {}_{T-t} \bar{P}_{X+t} &= \mathbb{E}_P \left[e^{-\int_t^T \mu_x(s) ds} \right] \\ &= e^{\alpha(t,T) - \beta(t,T) \mu_x(t)} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Avec $\alpha(t, T)$ et $\beta(t, T)$ exprimés comme suit :

$$\begin{cases} \alpha(t, T) = \frac{A}{b_\mu} \left[e^{b \frac{e^{(B+b_\mu)T} - e^{(B+b_\mu)t}}{B+b_\mu} - \frac{e^{b_\mu T} - e^{b_\mu t}}{B}} - \frac{\sigma_\mu^2}{2b_\mu^2} \left[\frac{1}{b_\mu} \left(1 - e^{-b_\mu(T-t)} \right) \right]^{-T+t} \right] - \frac{\sigma_\mu^2}{4b_\mu^3} \left(1 - e^{-b_\mu(T-t)} \right)^2 \\ \beta(t, T) = \frac{1}{b_\mu} \left(1 - e^{-b_\mu(T-t)} \right) \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Ce modèle de Hull & White présente quelques avantages et inconvénients :

- Avantages

- Modèle plus précis que celui de Vasicek,
- Permet d'avoir une moyenne de taux instantané de mortalité long terme non figée dans le temps,
- Le modèle est cohérent avec le marché.

- Inconvénients

- Comme dans le modèle de Vasicek, le taux instantané de mortalité peut toujours prendre des valeurs négatives car il suit un processus gaussien,
- Par rapport à Vasicek, plus de paramètres sont requis pour faire tourner le modèle notamment lors du calcul de probabilité de survie.

Chapitre 3

Valorisation du passif d'assurance

Il s'agira dans ce chapitre de valoriser le passif d'assurance dans les différentes situations suivantes : lorsque la présence du risque financier uniquement est considérée ; lorsque la présence conjointe du risque financier et du risque diversifiable est prise en compte ; lorsque la présence conjointe du risque financier et du risque non diversifiable est considérée et enfin lorsque la présence à la fois du risque financier, du risque diversifiable et du risque non diversifiable est prise en compte. Pour le faire nous utiliserons un contrat tel que défini dans le chapitre 2 et tout en considérant qu'on a un capital différé. Rappelons que tous nos calculs des engagements de l'assureur se font sous la base de l'hypothèse 4 et au temps $t=0$. Selon les risques pris en compte, \bar{Q} représente un produit de la mesure neutre Q du risque financier et de la mesure réelle P du risque diversifiable et \hat{Q} c'est \bar{Q} auquel s'associe le risque réel P du risque non diversifiable. Formellement, $\bar{Q} = Q * P$ et $\hat{Q} = Q * P * P$.

3.1 Valorisation du passif sous le risque purement financier

Supposer la présence du risque financier uniquement, revient à considérer que le portefeuille d'assurés est large et donc bien diversifié. La présence du risque financier se justifie par le fait que la performance de l'actif sur le marché financier est aléatoire. Plus précisément, il est supposé avoir une infinité d'assurés et la mesure Q , neutre du point de vue du risque, ne contient qu'un ajustement pour le risque financier. Dans cette situation, nous avons la taille de population à maturité qui devient une constante et s'écrit :

$$\begin{aligned} N &= N_0 e^{-\int_0^T m(s) ds} \\ &= N_{0T} P_X \end{aligned}$$

Où ${}_T P_X$ représente la probabilité pour un assuré d'âge X d'être en vie au temps T lorsque la mortalité est connue.

Pour déterminer la valeur des engagements de l'assureur envers un preneur d'assurance, tout part de l'expression (1.3.5). Puisqu'elle est aléatoire et évaluée à la signature du contrat, elle écrit formellement comme suit :

$$\begin{aligned}
V_0^1(\infty) &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} l^i(\infty) \right] \\
&= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] + \beta_1 \alpha(\infty) \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A(\infty)}{N} - \frac{b}{\alpha} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&\quad - \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A(\infty)}{N} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] + \beta_1 \alpha(\infty) \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A_0(\infty)e^R}{N_{0T}P_X} - \frac{b}{\alpha(\infty)} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&\quad - \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A_0(\infty)e^R}{N_{0T}P_X} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&= V_0^{g1}(\infty) + \beta_1 \alpha V_0^{b1}(\infty) - V_0^{d1}(\infty)
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
V_0^{g1}(\infty) &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
V_0^{b1}(\infty) &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A_0(\infty)e^R}{N_{0T}P_X} - \frac{b}{\alpha(\infty)} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
V_0^{d1}(\infty) &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A_0(\infty)e^R}{N_{0T}P_X} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right]
\end{aligned}$$

Où

- $V_0^{g1}(\infty)$ représente l'engagement en capital de l'assureur envers un assuré en vie à la maturité du contrat lorsque la présence du risque financier uniquement est considérée ;
- $V_0^{b1}(\infty)$ représente le montant de participation bénéficiaire que pourrait recevoir un assuré en vie à la maturité du contrat lorsque la présence du risque financier uniquement est considérée ;
- $V_0^{d1}(\infty)$ représente la valeur à maturité d'un actif de l'assureur en cas de rendement négatif lorsque la présence du risque financier uniquement est considérée ;
- R représente le logarithme du rendement des actifs sur la période $[0, T]$.

En tenant compte de l'hypothèse 4, on peut réécrire ces expressions comme suit :

$$\begin{aligned}
V_0^{g1}(\infty) &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&= b \cdot \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \right] \mathbb{E}_Q \left[1_{\{\tau^i \geq T\}} \right]
\end{aligned}$$

Or,

$$1_{\{\tau^i \geq T\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau^i \geq T \text{ avec } {}_T P_X \\ 0 & \text{sinon avec } 1 - {}_T P_X \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
V_0^{g_1}(\infty) &= b \cdot {}_T P_X \cdot \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \right] \\
&= b \cdot {}_T P_X \cdot P(0, T) \\
&= b \cdot {}_T P_X \cdot e^{(-C(0, T) - D(0, T)r(0))}
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
D(0, T) &= \frac{1}{b_r} (1 - e^{-b_r T}) \\
C(0, T) &= a_r (T - D(0, T)) - \frac{1}{2} E(0, T) \\
E(0, T) &= \frac{\sigma_r^2}{b_r^2} \left[T - \frac{2}{b_r} (1 - e^{-b_r T}) + \frac{1}{2b_r} (1 - e^{-2b_r T}) \right]
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
V_0^{b_1}(\infty) &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \left[\frac{A_0(\infty)e^R}{N_0 T P_X} - \frac{b}{\alpha(\infty)} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \left[\frac{A_0(\infty)e^R}{N_0 T P_X} - \frac{b}{\alpha(\infty)} \right]^+ \right] {}_T P_X \\
&= \frac{1}{N_0} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \left[A_0(\infty)e^R - \frac{N_0 \cdot b \cdot {}_T P_X}{\alpha(\infty)} \right]^+ \right] \\
&= \frac{1}{N_0} \left(A_0(\infty) \phi(d_1(0)) - \frac{N_0 \cdot b \cdot {}_T P_X}{\alpha(\infty)} e^{-A(0, T) + \frac{1}{2} B^2(0, T)T} \phi(d_2(0)) \right) \\
V_0^{d_1}(\infty) &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \left[b - \frac{A_0(\infty)e^R}{N_0 T P_X} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \left[b - \frac{A_0(\infty)e^R}{N_0 T P_X} \right]^+ \right] {}_T P_X \\
&= \frac{1}{N_0} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \left[b \cdot N_0 \cdot {}_T P_X - A_0(\infty)e^R \right]^+ \right] \\
&= \frac{1}{N_0} \left(b \cdot N_0 \cdot {}_T P_X e^{-A(0, T) + \frac{1}{2} B^2(0, T)T} \phi(h_1(0)) - A_0 \phi(h_2(0)) \right)
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
d_1(0) &= \frac{\ln(A_0) - \ln\left(\frac{N_0 \cdot b \cdot {}_T P_X}{\alpha(\infty)}\right) + A(0, T) - \frac{1}{2}v^2 T}{\sigma_s \sqrt{T}} + v\sqrt{T} \\
d_2(0) &= \frac{\ln(A_0) - \ln\left(\frac{N_0 \cdot b \cdot {}_T P_X}{\alpha(\infty)}\right) + A(0, T) - \frac{1}{2}v^2 T}{\sigma_s \sqrt{T}} - B(0, T)\sqrt{T} \\
h_1(0) &= -\frac{\ln(A_0) - \ln(b \cdot N_0 \cdot {}_T P_X) + A(0, T) - \frac{1}{2}v^2 T}{\sigma_s \sqrt{T}} + B(0, T)\sqrt{T} \\
h_2(0) &= -\frac{\ln(A_0) - \ln(b \cdot N_0 \cdot {}_T P_X) + A(0, T) - \frac{1}{2}v^2 T}{\sigma_s \sqrt{T}} - v\sqrt{T}
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
v^2 &= \sigma_s^2 + B(0, T)^2 - 2\rho\sigma_s B(0, T) \\
A(0, T) &= b_r T + \left(r(0) - b_r\right)\lambda(0, T) \\
B(0, T) &= \frac{\sigma_r}{a_r} \sqrt{T - \lambda(0, T) - \frac{a_r}{2}\lambda^2(0, T)} \\
\lambda(0, T) &= \frac{1}{a_r}(1 - e^{-a_r T})
\end{aligned}$$

L'égalisation des engagements de l'assureur $V_0^1(\infty)$ envers un assuré et la prime qu'il a versée $\left(\frac{\alpha A_0(\infty)}{N_0}\right)$, permet d'obtenir le taux de participation bénéficiaire égal à :

$$\beta_1 = \frac{\frac{\alpha(\infty)A_0(\infty)}{N_0} - V_0^{g_1}(\infty) + V_0^{d_1}(\infty)}{\alpha(\infty)V_0^{b_1}(\infty)} \quad (3.1.1)$$

3.2 Valorisation du passif sous le risque financier et le risque diversifiable

Le risque diversifiable est celui lié à la taille du portefeuille. A la différence du cas de la présence du risque purement financier, ici le nombre d'assurés constituant le portefeuille est faible et est noté N_0^f ; d'où la présence d'un autre risque dans le portefeuille appelé risque diversifiable. Il se matérialise par le fait que le nombre d'assurés en vie en maturité suit une loi binomiale et devient donc aléatoire. Formellement, il s'écrit :

$$\begin{aligned}
N &= \text{Bin}(N_0^f, {}_T P_X) \\
&= N_T
\end{aligned}$$

L'expression des engagements de l'assureur devient :

$$\begin{aligned}
V_0^2 &= E_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} i \right] \\
&= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] + \beta_2 \alpha \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A(\infty)}{N_T} - \frac{b}{\alpha} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&\quad - \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A}{N_T} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] + \beta_2 \alpha \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A_0 e^R}{N_T} - \frac{b}{\alpha} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&\quad - \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A_0 e^R}{N_T} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&= V_0^{g2} + \beta_2 \alpha V_0^{b2} - V_0^{d2}
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
V_0^{g2} &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
V_0^{b2} &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A_0 e^R}{N_T} - \frac{b}{\alpha} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
V_0^{d2} &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A_0 e^R}{N_T} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right]
\end{aligned}$$

Où

- $V_0^{g2}(\infty)$ représente l'engagement en capital de l'assureur envers un assuré en vie à la maturité du contrat lorsque la présence conjointe du risque financier et du risque diversifiable est prise en compte ;
- $V_0^{b2}(\infty)$ représente le montant de participation bénéficiaire que pourrait recevoir un assuré en vie à la maturité du contrat lorsque la présence conjointe du risque financier et du risque diversifiable est prise en compte ;
- $V_0^{d2}(\infty)$ représente la valeur à maturité d'un actif de l'assureur en cas de rendement négatif lorsque la présence conjointe du risque financier et du risque diversifiable est prise en compte.

En s'appuyant sur l'hypothèse 4, on peut réécrire ces expressions comme suit :

$$\begin{aligned}
V_0^{g2} &= \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&= V_0^{g1}(\infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_0^{b2} &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A_0 e^R}{N_T} - \frac{b}{\alpha} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[\mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A_0 e^R}{N_T} - \frac{b}{\alpha} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \mid N_T \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[V_0^{b1}(\infty) \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[\frac{{}_T P_X}{N_T} \left(A(0)\phi(d_1(0)) - \frac{N_T \cdot b}{\alpha(\infty)} e^{-A(0,T) + \frac{1}{2} B^2(0,T)T} \phi(d_2(0)) \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[{}_T P_X \left(\frac{A(0)}{N_T} \phi(d_1(0)) - \frac{b}{\alpha(\infty)} e^{-A(0,T) + \frac{1}{2} B^2(0,T)T} \phi(d_2(0)) \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[{}_T P_X \left(\frac{A(0)}{N_T} \phi(d_1(0)) - \frac{b}{\alpha(\infty)} e^{-A(0,T) + \frac{1}{2} B^2(0,T)T} \phi(d_2(0)) \right) \right] \\
&= {}_T P_X \left(A(0)\phi(d_1(0)) \mathbb{E}_P \left(\frac{1}{N_T} \right) - \frac{b}{\alpha(\infty)} e^{-A(0,T) + \frac{1}{2} B^2(0,T)T} \phi(d_2(0)) \right)
\end{aligned}$$

Avec

$$\mathbb{E}_P \left(\frac{1}{N_T} \right) = \sum_{j=1}^{N_0^f} \frac{N_0^f!}{j!(N_0^f - j)!} {}_T P_X^j \left(1 - {}_T P_X \right)^{N_0^f - j} \frac{1}{j}$$

$$\begin{aligned}
V_0^{d2} &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \mathbb{E}_Q \left[b - \frac{A_0 e^R}{N_T} \right]^+ 1_{\{\tau^i \geq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[{}_T P_X \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A_0(\infty) e^R}{N_T} \right]^+ \mid N_T \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[V_0^{d1}(\infty) \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[\frac{{}_T P_X}{N_T} \left(b \cdot N_T e^{-A(0,T) + \frac{1}{2} B^2(0,T)T} \phi(h_1(0)) - A_0 \phi(h_2(0)) \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[{}_T P_X \left(b \cdot e^{-A(0,T) + \frac{1}{2} B^2(0,T)T} \phi(h_1(0)) - \frac{A_0}{N_T} \phi(h_2(0)) \right) \right] \\
&= {}_T P_X \left(b \cdot e^{-A(0,T) + \frac{1}{2} B^2(0,T)T} \phi(h_1(0)) - A_0 \phi(h_2(0)) \mathbb{E}_P \left(\frac{1}{N_0} \right) \right)
\end{aligned}$$

En égalisant les engagements de l'assureur V_0^2 envers un assuré et la prime qu'il a versée $\left(\frac{\alpha A_0}{N_0^f}\right)$,

on obtient le taux de participation bénéficiaire égal à :

$$\beta_2 = \frac{\frac{\alpha A_0}{N_0^f} - V_0^{g_2} + V_0^{d_1}}{\alpha V_0^{b_1}} \quad (3.2.1)$$

3.3 Valorisation du passif sous le risque financier et le risque non diversifiable

Dans ce cas de la présence conjointe du risque financier et du risque non diversifiable la taille du portefeuille est large et l'évolution de la mortalité devient stochastique. Pour calculer le passif d'assurance ici, l'article rédigé par P. Devolder et C. Azizieh [9] est utilisé.

Dans ce cas, l'expression des engagements de l'assureur devient donc :

$$\begin{aligned} V_0^3(\infty) &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} l^i(\infty) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] + \beta_3 \alpha(\infty) \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A(\infty)}{N} - \frac{b}{\alpha(\infty)} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A(\infty)}{N} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\ &= V_0^{g_3}(\infty) + \beta^3 \alpha(\infty) V_t^{b_3}(\infty) - V_t^{d_3}(\infty) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} V_0^{g_3}(\infty) &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\ V_0^{b_3}(\infty) &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A(\infty)}{N} - \frac{b}{\alpha(\infty)} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\ V_0^{d_3}(\infty) &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A(\infty)}{N} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \end{aligned}$$

Où

- $V_0^{g_3}(\infty)$ représente l'engagement en capital de l'assureur envers un assuré en vie à la maturité du contrat lorsque la présence conjointe du risque financier et du risque non diversifiable est prise en compte ;
- $V_0^{b_3}(\infty)$ représente le montant de participation bénéficiaire que pourrait recevoir un assuré en vie à la maturité du contrat lorsque la présence conjointe du risque financier et du risque non diversifiable est prise en compte ;
- $V_0^{d_3}(\infty)$ représente la valeur à maturité d'un actif de l'assureur en cas de rendement négatif lorsque la présence conjointe du risque financier et du risque non diversifiable est prise en compte.

En se servant de l'hypothèse 4, l'écriture de ces expressions devient :

$$\begin{aligned} V_0^{g3}(\infty) &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\ &= b \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \right] \mathbb{E}_P \left[\mathbf{1}_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \end{aligned}$$

Or,

$$\mathbf{1}_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{\tau}^i \geq T \text{ avec } {}_T\bar{P}_X \\ 0 & \text{sinon avec } 1 - {}_T\bar{P}_X \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} V_0^{g3}(\infty) &= b \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \right] {}_T\bar{P}_X \\ &= b \cdot P(0, T) \cdot {}_T\bar{P}_X \end{aligned}$$

Où ${}_T\bar{P}_X = \mathbb{E}_P \left[e^{-\int_0^T \mu_x(s)ds} \right]$.

De même

$$\begin{aligned} V_0^{b3}(\infty) &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A(\infty)}{N} - \frac{b}{\alpha(\infty)} \right]^+ \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} e^{-\int_0^T \mu_x(s)ds} \left[\frac{A_0(\infty)e^R}{N_0 e^{-\int_0^T \mu_x(s)ds}} - \frac{b}{\alpha(\infty)} \right]^+ \right] \\ &= \frac{1}{N_0} \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T \bar{r}(s)ds} \left[A_0(\infty)e^R e^{\int_0^T \mu(s)ds} - \frac{bN_0}{\alpha(\infty)} \right]^+ \right] \\ &= \frac{1}{N_0} \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T \bar{r}(s)ds} \left[A_0(\infty)e^R B(T) - \frac{bN_0}{\alpha(\infty)} \right]^+ \right] \\ &= \frac{1}{N_0} \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T \bar{r}(s)ds} \left[R(T) - \frac{bN_0}{\alpha(\infty)} \right]^+ \right] \\ &= \frac{1}{N_0} \left(R(0)\phi(g_1(0)) - \frac{N_0 \cdot b}{\alpha(\infty)} E_X(0, T)\phi(g_2(0)) \right) \\ V_0^{d3}(\infty) &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A(\infty)}{N} \right]^+ \mathbf{1}_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} e^{-\int_0^T \mu(s)ds} \left[b - \frac{A_0(\infty)e^R}{N_0 e^{-\int_0^T \mu_x(s)ds}} \right]^+ \right] \\ &= \frac{1}{N_0} \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T \bar{r}(s)ds} \left[bN_0 - A_0(\infty)e^R e^{\int_0^T \mu_x(s)ds} \right]^+ \right] \\ &= \frac{1}{N_0} \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T \bar{r}(s)ds} [bN_0 - R(T)]^+ \right] \\ &= \frac{1}{N_0} \left(N_0 \cdot b \cdot E_X(0, T)\phi(l_1(0)) - R(0)\phi(l_2(0)) \right) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
g_1(0) &= \frac{\ln\left(\frac{R(0)\alpha(\infty)}{bN_0}\right) - \ln(E_X(0, T))}{V(0, T)} + \frac{1}{2}V(0, T) \\
g_2(0) &= \frac{\ln\left(\frac{R(0)\alpha(\infty)}{bN_0}\right) - \ln(E_X(0, T))}{V(0, T)} - \frac{1}{2}V(0, T) \\
l_1(0) &= -\frac{\ln\left(\frac{R(0)}{bN_0}\right) - \ln(E_X(0, T))}{V(0, T)} + \frac{1}{2}V(0, T) \\
l_2(0) &= -\frac{\ln\left(\frac{R(0)}{bN_0}\right) - \ln(E_X(0, T))}{V(0, T)} - \frac{1}{2}V(0, T) \\
R(0) &= A_0(\infty)B(0) \\
R(T) &= A_0(\infty)e^R B(T)
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
V^2(0, T) &= \sigma_s^2 T + \int_0^T \sigma_r^2(0, T) du + 2 \int_0^T \rho \sigma_S \sigma_r(0, T) du + \int_0^T X^2(0, T) du \\
X(0, T) &= \frac{\sigma_\mu}{b_\mu} [1 - e^{-b_\mu T}] \\
\sigma_r(0, T) &= \frac{\sigma_r}{a_r} [1 - e^{-a_r T}] \\
E_X(0, T) &= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} e^{-\int_0^T \mu_x(s) ds} \right] \\
&= \mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \right] \mathbb{E}_P \left[e^{-\int_0^T \mu_x(s) ds} \right] \\
&= P(0, T) \cdot {}_T\bar{P}_X
\end{aligned}$$

En égalisant les engagements de l'assureur $V_0^3(\infty)$ envers un assuré et la prime qu'il a versée $(\frac{\alpha A_0(\infty)}{N_0})$, on obtient le taux de participation bénéficiaire égal à :

$$\beta_3 = \frac{\frac{\alpha(\infty)A_0(\infty)}{N_0} - V_t^{g_3} + V_0^{d_3}}{\alpha(\infty)V_0^{b_3}} \quad (3.3.1)$$

3.4 Valorisation du passif sous le risque financier le risque diversifiable et le risque non diversifiable

Cette situation résume le cas où on a simultanément une petite taille de portefeuille d'assurés, la mortalité qui s'améliore et un risque financier. Ceci revient à la situation précédente mais dans le

cas d'un petit portefeuille d'assurés. Le fait de considérer ces risques simultanément complique la valorisation du passif. Pour introduire le risque diversifiable dans la valorisation du passif dans ce cas, la méthode proposée permet d'avoir un résultat approché. Elle consiste dans un premier temps à introduire la probabilité corrigée comme dans le cas 3 et dans un second temps à introduire le risque diversifiable \bar{N}_T proprement dit en utilisant une loi binomiale. L'expression des engagements de l'assureur devient :

$$\begin{aligned}
V_0^4 &= \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} l^i \right] \\
&= \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] + \beta_4 \alpha \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A}{\bar{N}_T} - \frac{b}{\alpha} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\
&\quad - \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A}{\bar{N}_T} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\
&= V_0^{g4} + \beta_4 \alpha V_0^{b4} - V_0^{d4}
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
V_0^{g4} &= \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\
V_0^{b4} &= \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A}{\bar{N}_T} - \frac{b}{\alpha} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\
V_0^{d4} &= \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A}{\bar{N}_T} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right]
\end{aligned}$$

Où

- $V_0^{g4}(\infty)$ représente l'engagement en capital de l'assureur envers un assuré en vie à la maturité du contrat lorsque la présence conjointe du risque financier, risque diversifiable et du risque non diversifiable est prise en compte ;
- $V_0^{b4}(\infty)$ représente le montant de participation bénéficiaire que pourrait recevoir un assuré en vie à la maturité du contrat lorsque la présence conjointe du risque financier, risque diversifiable et du risque non diversifiable est prise en compte ;
- $V_0^{d4}(\infty)$ représente la valeur à maturité d'un actif de l'assureur en cas de rendement négatif lorsque la présence conjointe du risque financier, risque diversifiable et du risque non diversifiable est prise en compte.

En se servant de l'hypothèse 4, ces expressions se réécrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
V_0^{g4} &= \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \cdot b \cdot 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\
&= V_0^{g3}(\infty)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_0^{b4} &= \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A}{\bar{N}_T} - \frac{b}{\alpha} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[\mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[\frac{A}{\bar{N}_T} - \frac{b}{\alpha} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} | \bar{N}_T \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[V_0^{b3}(\infty) \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[\frac{e^{-\int_0^T \mu_x(s)ds}}{\bar{N}_T} \left(R(0)\phi(g_1(0)) - \frac{N_0 \cdot b}{\alpha(\infty)} E_X(0, T)\phi(g_2(0)) \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[e^{-\int_0^T \mu_x(s)ds} \left(\frac{R(0)}{\bar{N}_T} \phi(g_1(0)) - \frac{b}{\alpha(\infty)} \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \right] \phi(g_2(0)) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_0^{d4} &= \mathbb{E}_{\hat{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A}{\bar{N}_T} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[\mathbb{E}_{\bar{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \left[b - \frac{A}{\bar{N}_T} \right]^+ 1_{\{\bar{\tau}^i \geq T\}} | \bar{N}_T \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[V_0^{d3}(\infty) \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[\frac{e^{-\int_0^T \mu_x(s)ds}}{\bar{N}_T} \left(N_0 \cdot b \cdot E_X(0, T)\phi(l_1(0)) - R(0)\phi(l_2(0)) \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[e^{-\int_0^T \mu_x(s)ds} \left(b \cdot \mathbb{E}_Q \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \right] \phi(l_1(0)) - \frac{R(0)}{\bar{N}_T} \phi(l_2(0)) \right) \right]
\end{aligned}$$

En égalisant les engagements de l'assureur V_0^{d4} envers un assuré et la prime qu'il a versée $(\frac{\alpha A_0}{N_0^f})$, on obtient le taux de participation bénéficiaire égal à :

$$\beta_4 = \frac{\frac{\alpha A_0}{N_0^f} - V_0^{g4} + V_0^{d4}}{\alpha V_0^{b4}} \quad (3.4.1)$$

Pour calculer chaque part d'engagement de l'assureur ainsi défini selon les risques considérés afin de déterminer nos taux de participation bénéficiaire, il convient de faire au préalable une calibration des paramètres.

Chapitre 4

Calibrations et applications numériques

4.1 Calibrations

Plusieurs raisons peuvent amener à calibrer des modèles en assurance. Il peut s'agir de l'amélioration des prédictions et de mieux tarifier un produit, de l'amélioration du modèle (dans le but d'avoir des applications opérationnelles), de la détermination des paramètres et de la déduction des variables d'intérêt. Pour ces raisons seront calibrés tour à tour le taux d'intérêt, l'action dans laquelle sera investie les primes perçues et le taux instantané de mortalité.

4.1.1 Calibration des paramètres du taux d'intérêt : modèle de Vasicek

Pour modéliser les taux d'intérêt, le modèle de Vasicek est choisi car il permet d'obtenir les taux d'intérêt négatifs ; ce qui est conforme à la réalité actuelle. L'évolution du taux cours est donnée par l'équation (2.1.1) sous la mesure réelle P . Pour estimer ces paramètres, le modèle est calibré avec un historique de taux courts : "*Treasury Yield 10 Years (TNX)*", dont les données sont tirées du site "*Yahoo finance*". Les données considérées sont journalières (taux d'intérêt de clôture) sur une période d'un an, du 05 Mars 2019 au 05 Mars 2020 (voir annexe 4.2.1) dont l'évolution est donnée par la courbe ci-dessous :

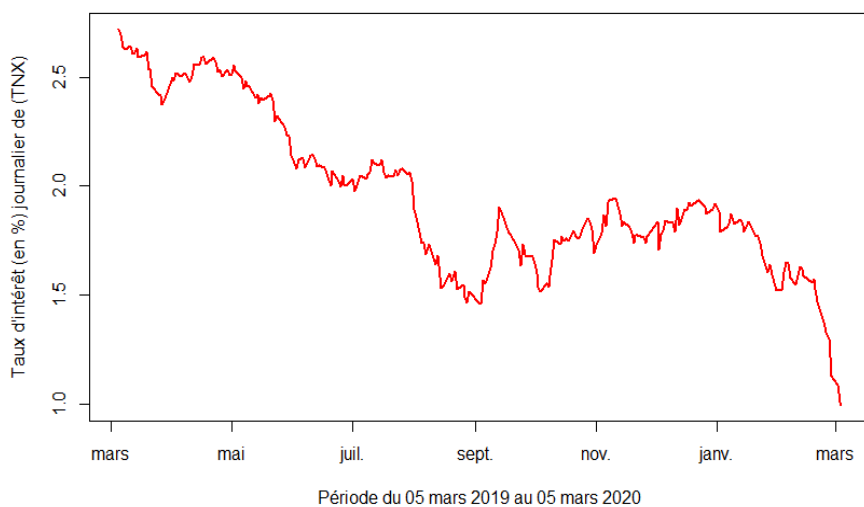


FIGURE 4.1.1 – Évolution du Treasury Yield 10 Years du 05 mars 2019 au 05 mars 2020

Une discrétisation de cette équation différentielle stochastique, permet d'aboutir à :

$$r(t + \Delta t) = r(t) \exp(-a_r \Delta t) + b(1 - \exp(-a_r \Delta t)) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - \exp(-a_r \Delta t)}{2a_r}} \varepsilon_t \quad (4.1.1)$$

Où ε_t est un bruit blanc et $\Delta t = \frac{1}{305}$.

En posant :

$$\begin{aligned} Y &= r(t + \Delta t) \\ X &= r(t) \\ a_1 &= \exp(-a_r \Delta t) \\ b_1 &= b(1 - \exp(-a_r \Delta t)) \\ \varepsilon &= \sigma_r \sqrt{\frac{1 - \exp(-a_r \Delta t)}{2a_r}} \varepsilon_t \end{aligned}$$

D'où l'obtention de l'équation linéaire simple : $Y = a_1 X + b_1 + \varepsilon$. L'application d'une régression linéaire simple à cette équation à partir de la fonction *lm* du logiciel R permet d'obtenir les valeurs estimées de a_1 , b_1 et la variance des résidus et de déduire les paramètres de notre modèle de Vasicek :

Paramètres	Valeurs
a_r	3.968193
\bar{r}	0.02486423
σ_r	0.002031026

TABLE 4.1.1 – Estimation des paramètres du modèle de Vasicek

Avec :

$$a_r = -\frac{\ln(a_1)}{\Delta t}$$

$$b_r = \frac{b_1}{1 - a_1}$$

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{Var(\varepsilon)}{\frac{1 - \exp(-a\Delta t)}{2a}}}$$

Pour passer de la mesure risque réel P à la mesure risque neutre Q , il faut estimer la prime de risque λ et déterminer le paramètre \bar{b} qui différencie les deux mesures de risques. La prime de risque peut être considérée comme étant nulle ou quasi nulle en période de bulle spéculative c'est à dire que l'actif est moins risqué ou s'il s'agit des obligations d'état. Comme l'historique de taux d'intérêt utilisé ici est celui d'une obligation d'état à court terme, la prime de risque est supposée être nulle. Ainsi la valeur des paramètres en mesure risque neutre et en mesure réelle sont identiques.

Maintenant que nos paramètres sont déterminés, réalisons 10000 simulations Monte-Carlo de l'évolution du taux d'intérêt, en utilisant le modèle de Vasicek discrétisé par la méthode de Euler en partant de l'équation (2.1.5) et défini comme suit :

$$r(t + \Delta t) = r(t) + a(\bar{b} - r(t))\Delta t + \sigma_r Z \sqrt{\Delta t} \quad \text{avec} \quad Z \sim N(0, 1) \quad (4.1.2)$$

A partir de ces simulations sur le logiciel R avec `set.seed(10000)`, on déduit le graphe de l'évolution des taux d'intérêt et celui de leur moyenne montrant bien la convergence des taux vers le taux d'intérêt moyen à long terme $\bar{b} = 0.02486423$:

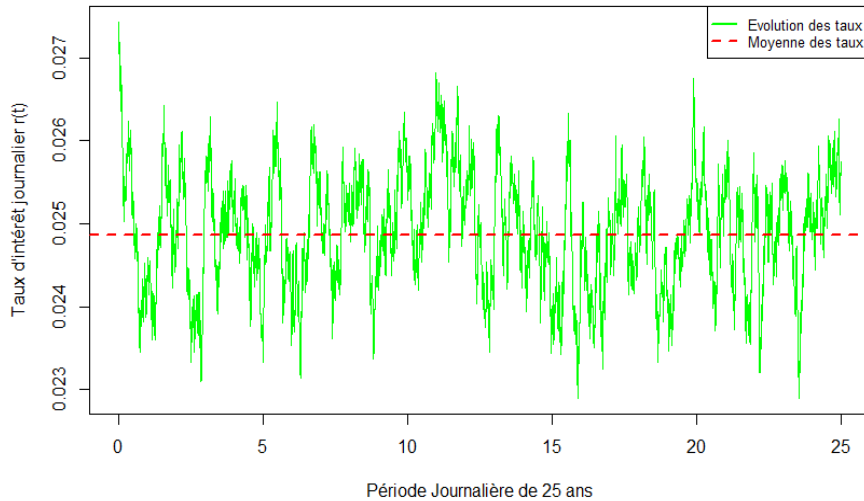


FIGURE 4.1.2 – Évolution des taux d'intérêt au cours de 25 années.

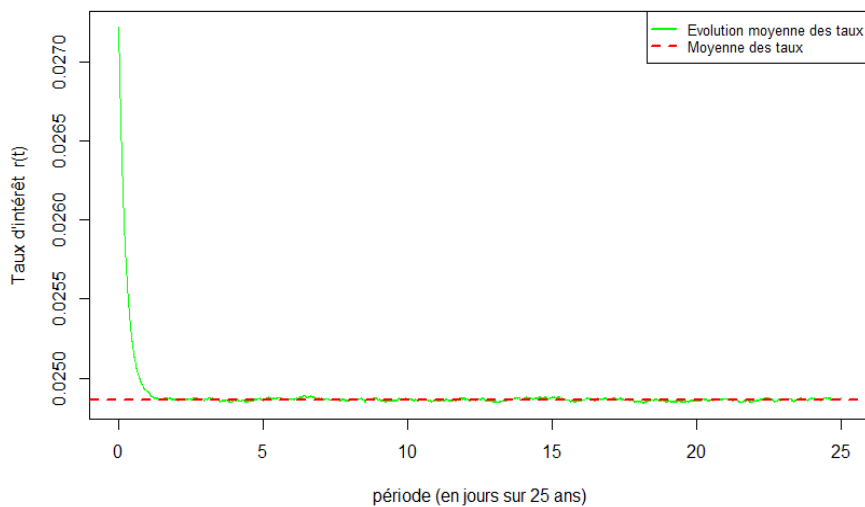


FIGURE 4.1.3 – Évolution des taux d'intérêt moyens vers le taux d'intérêt moyen.

4.1.2 Calibration des paramètres de l'action

Au cours de ce travail, il est considéré que les primes sont uniquement investies dans un actif risqué. Les données utilisées sont les cotations journalières de l'indice "BEL 20" sur la période du 05 Mars 2019 au 05 Mars 2020 (voir annexe 4.2.2), soit 256 jours ouvrables, et extrait du site "Yahoo Finance" pour calibrer le modèle.

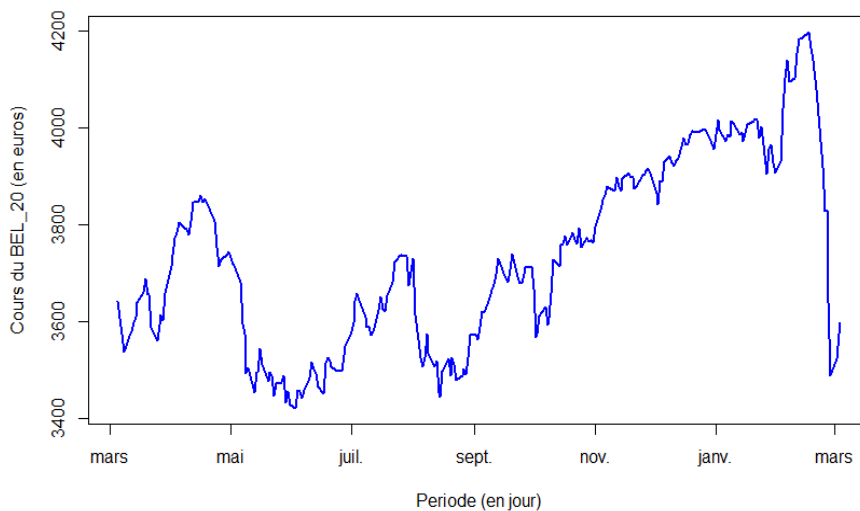


FIGURE 4.1.4 – Évolution journalière de l'indice "BEL-20" du 05 Mars 2019 au 05 Mars 2020

Les paramètres du modèle à estimer qui sont le rendement moyen annuel des actions (μ_s) et sa volatilité (σ_s) se calculent comme suit :

$$\mu_s = \frac{1}{256} \sum_{i=1}^{256} \frac{S(i+1) - S(1)}{S(1)} \quad (4.1.3)$$

$$\sigma_s = \frac{1}{256} \sum_{i=1}^{256} (S(i) - \mu_s)^2 \quad (4.1.4)$$

De même, la détermination de la corrélation (ρ) entre évolution du cours de l'indice "BEL 20" et celui des taux d'intérêt du " Treasury Yield 10 Years" au cours de la même période se fait ainsi :

$$\rho = \frac{cov(\mu_S, r(t))}{\sigma_S \sigma_r} \quad (4.1.5)$$

L'application de ces formules sur le logiciel R à partir des données choisies, permet d'obtenir les paramètres regroupés dans le tableau ci-dessous :

Paramètres	Valeurs
μ_S	0.02415314
σ_S	0.05346169
ρ	0.04470145

TABLE 4.1.2 – Paramètres estimés de l'actif

Pour simuler l'actif risqué, le point de départ est l'équation différentielle stochastique (2.1.8) qui est discrétisée en tenant compte de la corrélation entre le rendement de "BEL 20 et l'évolution de " Treasury Yield 10 Years" pour obtenir la version discrète de S(t) :

$$S(t + \Delta_{st}) = S(t) + r(t)S(t)\Delta_{st} + \sigma_S S(t) \sqrt{\Delta_{st}} (\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2) \quad (4.1.6)$$

Avec

$$\Delta_{st} = \frac{1}{252}$$

L'application sur le logiciel R de 10000 simulations de Monte-Carlo de l'actif risqué consiste tout d'abord à simuler 10000 fois les lois centrées réduites Z_1 et Z_2 puis r et enfin S .

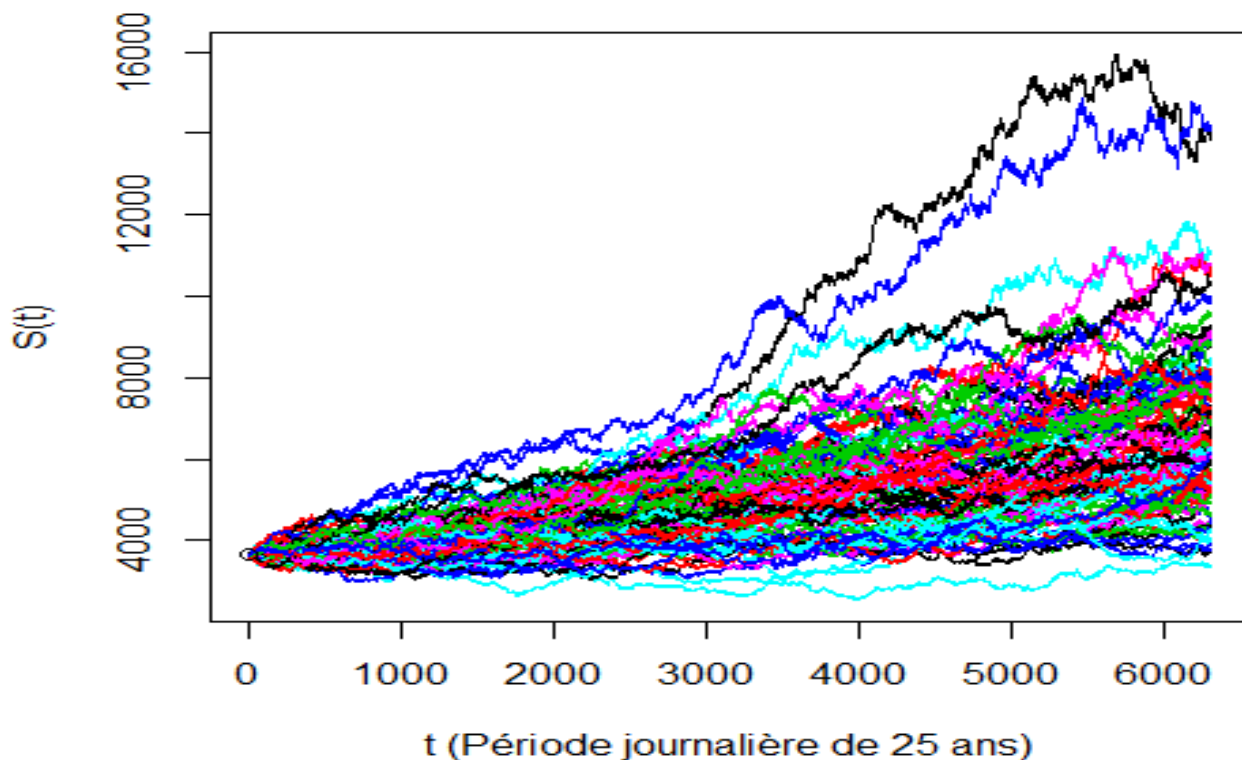


FIGURE 4.1.5 – 100 trajectoires de $S(t)$ pour $S(0)=3641.14$

4.1.3 Calibration des paramètres du taux d'instantané de mortalité : modèle Gompertz

Afin de déterminer la probabilité de survie lorsque la mortalité est supposée statique, il convient de calibrer les paramètres du modèle. Pour se faire, les tables choisies sont celles prospectives de l'IABE qui donne les probabilités de décéder dans l'année et selon l'âge. Considérant les probabilités de décès de l'année 2020 pour un individu âgé de 40 ans et partant du fait qu'il soit en vie, la déduction des taux instantanés de mortalité et des probabilités de survie s'est faite. Ces probabilités de survie ont donc été utilisées comme données historiques pour estimer les paramètres de la probabilité de survie. L'estimation des paramètres peut se faire par plusieurs méthodes à savoir : le maximum de vraisemblance, la méthode des moments et la méthode des moindres carrés. L'implémentation de la méthode des moindres carrés étant facile, elle est celle choisie. Elle consiste à la détermination des paramètres de la probabilité de survie estimée (2.2.2) qui minimisent la somme au carré de la différence entre cette probabilité de survie estimée et celle historique. En utilisant la fonction **Constroptim** du logiciel R pour le faire, les paramètres obtenus sont :

Paramètres	Valeurs
λ	0.0000169
c	1.099301

TABLE 4.1.3 – Paramètres Estimés du taux instantané de mortalité du modèle de Gompertz

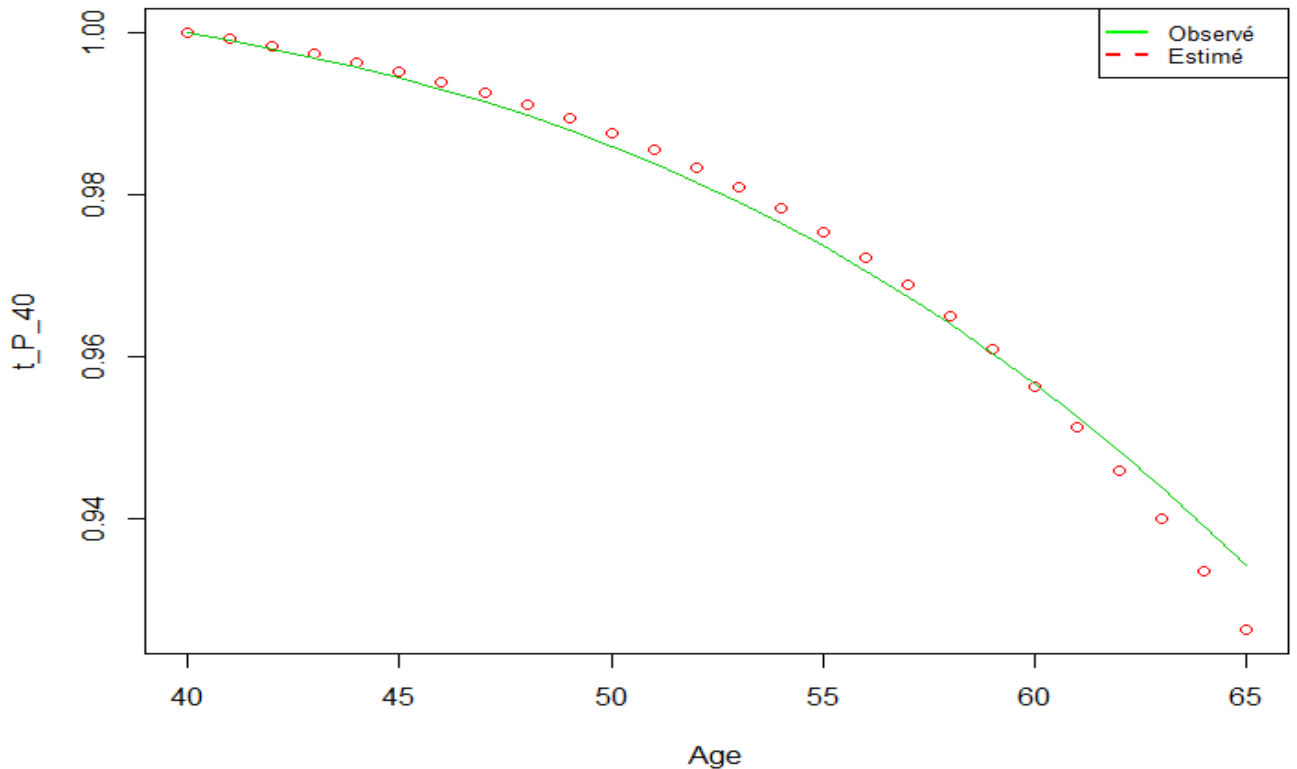


FIGURE 4.1.6 – Courbe de la probabilité de survie avec le modèle de Gompertz

Grâce à ces paramètres il est donc possible de déterminer le taux instantané de mortalité et probabilité de survie à tout âge. Pour le cas d'un assuré de 40 ans, sa probabilité d'être en vie dans 25 ans est ${}_T P_X = 0.9263661$.

4.1.4 Calibration des paramètres du taux d'instantané de mortalité : modèle de Hull & White

Comme dans le cas du modèle de Gompertz, la table de mortalité utilisée est celle L'IABE. La méthode utilisée est toujours celle des moindres carrés et les paramètres à estimer sont ceux définis dans la probabilité de survie (2.2.5). En utilisant également la fonction **Constroptim** du logiciel R pour le faire, les paramètres obtenus sont :

Paramètres	Valeurs
A	0.000239281
B	0.000002525769
b_μ	0.0000008960126
σ_μ	0.000000349335

TABLE 4.1.4 – Paramètres Estimés du taux instantanée de mortalité du modèle de Gompertz

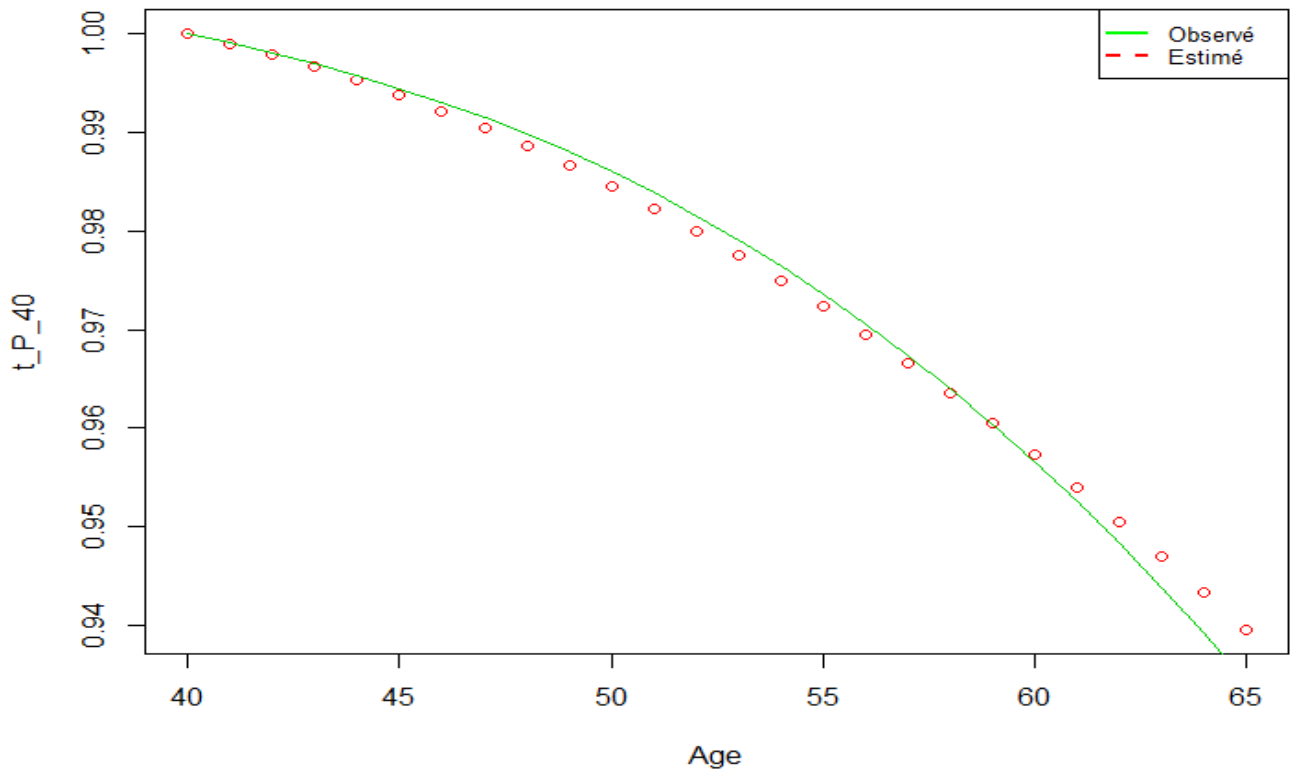


FIGURE 4.1.7 – Courbe de la probabilité de survie avec le modèle de Gompertz

Le constat de l'amélioration de la probabilité de survie est clair car pour le cas d'un assuré de 40 ans, sa probabilité d'être en vie dans 25 ans passe ${}_T P_X = 0.9263661$ à ${}_T \bar{P}_X = 0.9395958$.

4.2 Applications numériques

Dans cette section, il sera question d'évaluer le taux de participation bénéficiaire selon les risques pris en compte dans les situations énoncées ci-dessus. Les données de bases de la cohorte d'assurés ayant souscrit à l'assurance pour capital différé et qui seront utilisés pour calculer leurs taux de participations bénéficiaires selon les risques considérés sont résumés dans le tableau suivant :

Paramètres	Valeurs
Âge à la signature du contrat	40 ans
Maturité du contrat T	25 ans
Actif initial pour le portefeuille diversifié $A_0(\infty)$	1000000 €
Actif initial pour le portefeuille non diversifié $A_0(\infty)$	100000 €
Ratio de contribution initial d'un assuré α	0.8
Capital promis (b) à chaque assuré vivant à maturité	4000 €
Taille du portefeuille d'assurés diversifié	400
Taille du portefeuille d'assurés non diversifié	40 et 80

TABLE 4.2.1 – Données des portefeuilles

Dans la suite du travail, la taille de 400 assurés correspondra à un portefeuille diversifié et sera utilisée dans les cas de présence du risque purement financier et de présence simultanée du risque financier et du risque non diversifiable tandis que la taille de 40 et 80 assurés correspondra à un portefeuille non diversifié et sera utilisée dans les autres cas.

4.2.1 Cas 1 : Détermination des taux de participations bénéficiaires en présence du risque purement financier

En appliquant la formule (3.1.1) déterminée au chapitre précédent le tableau ci-dessous est obtenu :

Capital assuré	Taux de participation bénéficiaire (β_1)
$b = 2000$	0.9999118
$b = 2500$	0.9865783
$b = 3000$	0.9290035
$b = 3500$	0.7727944
$b = 4000$	0.4305768

TABLE 4.2.2 – Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d'un portefeuille d'assurés soumis au risque purement financier.

4.2.2 Cas 2 : Détermination des taux de participations bénéficiaires en présence du risque financier et du risque diversifiable

En appliquant la formule (3.2.1) déterminée au chapitre précédent le tableau ci-dessous est obtenu :

Capital assuré	Taux de participation bénéficiaire (β_2)
$b = 2000$	0.995733
$b = 2500$	0.9784093
$b = 3000$	0.9241343
$b = 3500$	0.7675811
$b = 4000$	0.4232903

TABLE 4.2.3 – Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d’un portefeuille d’assurés en présence du risque financier et du risque diversifiable pour 40 assurés.

Si le taille du portefeuille double (80 assurés), l’actif initial double également soit (200000€). Les résultats deviennent :

Capital assuré	Taux de participation bénéficiaire (β_2)
$b = 2000$	0.9984913
$b = 2500$	0.9843779
$b = 3000$	0.9251499
$b = 3500$	0.7708513
$b = 4000$	0.426178

TABLE 4.2.4 – Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d’un portefeuille d’assurés en présence du risque financier et du risque diversifiable pour 80 assurés.

4.2.3 Cas 3 : Détermination des taux de participations bénéficiaires en présence du risque financier et du risque non diversifiable

En appliquant la formule (3.3.1) déterminée au chapitre précédent le tableau ci-dessous est obtenu :

Capital assuré	Taux de participation bénéficiaire (β_3)
$b = 2000$	0.88506
$b = 2500$	0.848914
$b = 3000$	0.769937
$b = 3500$	0.573688
$b = 4000$	0.0964987

TABLE 4.2.5 – Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d’un portefeuille d’assurés en présence du risque financier et du risque non diversifiable.

4.2.4 Cas 4 : Détermination des taux de participations bénéficiaires en présence du risque financier, du risque diversifiable et du risque non diversifiable

En appliquant la formule (3.4.1) déterminée au chapitre précédent le tableau ci-dessous est obtenu :

Capital assuré	Taux de participation bénéficiaire (β_4)
$b = 2000$	0.8815224
$b = 2500$	0.8465816
$b = 3000$	0.7666121
$b = 3500$	0.5685806
$b = 4000$	0.09321657

TABLE 4.2.6 – Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d’un portefeuille d’assurés en présence du risque financier, du risque diversifiable et du risque non diversifiable pour 40 assurés.

Si le taille du portefeuille (80 assurés) et de l’actif initial (200000€) sont doublés, les résultats deviennent :

Capital assuré	Taux de participation bénéficiaire (β_4)
$b = 2000$	0.883691
$b = 2500$	0.8473704
$b = 3000$	0.767745
$b = 3500$	0.5710982
$b = 4000$	0.09519733

TABLE 4.2.7 – Sensibilité du taux de participation bénéficiaire au capital d’un portefeuille d’assurés en présence du risque financier, du risque diversifiable et du risque non diversifiable pour 80 assurés.

4.2.5 Interprétation des résultats

Dans la situation où la présence du risque purement financier est considérée, le taux de participation est plus grand que dans le reste des cas où à ce dernier est combiné à un ou plusieurs autres risques. Il est noté une décroissance progressive du taux de participation bénéficiaire entre le cas 1 et le cas 4.

L’écart entre le taux de participation bénéficiaire du cas 1 et du cas 2 n’est pas significatif. Ce qui permet de dire que l’impact du risque diversifiable sur les engagements de l’assureur est négligeable. Autrement dit, peu importe la taille du portefeuille, les engagements de l’assureur sont quasiment les mêmes. Cette remarque est aussi pertinente lorsque le cas 3 et le cas 4 sont comparés.

Lorsque la comparaison des taux de participations bénéficiaires se fait entre le cas 1 et les cas 3 et 4 ou entre le cas 2 et les cas 3 et 4, il est évident de constater une baisse importante des taux de participations bénéficiaires. La présence conjointe du risque financier et du risque non diversifiable a un impact important sur le taux de participation bénéficiaire. Autrement dit, un assureur qui négligerait le risque non diversifiable et par conséquent l’amélioration de la mortalité au cours du temps serait entrain de sous estimer ses engagements et de s’exposer à un risque de solvabilité.

Conclusion

Dans cette étude il a été question de valoriser le passif d'assurance sous la contrainte du risque de longévité et du risque d'investissement. De façon concrète il fallait mesurer pour un capital différé l'impact de la présence conjointe du risque financier et du risque non diversifiable. La démarche entreprise s'est construite autour de quatre chapitres. Le premier a permis de structurer le contrat et modéliser le risque d'assurance et le risque de portefeuille. Le deuxième chapitre a consisté en la modélisation des paramètres financiers et de mortalité nécessaires à la valorisation du passif. Le troisième a porté sur la valorisation du passif proprement dit. Et enfin, le quatrième a consisté en la calibration des paramètres modélisés précédemment et aux applications numériques.

Les résultats révèlent l'importance de tenir compte conjointement du risque financier et du risque biométrique et plus spécifiquement le risque non diversifiable. En effet force est de constater que lorsque le risque financier uniquement est pris en compte, l'assureur promet environ entre 11% et 30% de participation bénéficiaire à chaque assuré qu'il ne devrait lorsque le capital promis à ce dernier varie entre la prime qu'il verse et son double. Par conséquent négliger le risque non diversifiable revient pour la compagnie d'assurance à courir un risque de solvabilité pouvant conduire sa faillite.

La conclusion de ces travaux est la même conclusion que celle de A. Bacinello, P. Millosovich et A. Chen [11] à savoir que le taux de participation bénéficiaire promis aux assurés doit être prudent car la longévité s'améliore au cours du temps et par conséquent augmente les engagements de l'assureur. Pour aller plus loin dans ce mémoire, il aurait été utile de calculer la valeur exacte du passif lorsque tous les risques sont pris en compte. De plus, un travail complémentaire serait de voir si l'impact de ces risques pour un capital différé auquel est adjoint une option de rente est plus important et d'investiguer s'il devrait conduire à être plus prudent au moment de définir le taux participation bénéficiaire.

Bibliographie

- [1] Frédéric Planchet. Pierre Thérond. Julien Jacquemin, Modèles financière en assurance, Analyse de risque dynamiques, *Economica*, 2005.
- [2] Pierre Devolder Notes de Cours de Mathématique financière UCL 2018-2019.
- [3] Lionel Martellini. Philippe Priaulet, Produits de taux d'intérêt : méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture, *Economica*, 2004.
- [4] Pierre Thérond Slides du cours ISFA 2013. Disponible en ligne par lien : <http://www.therond.fr/wp-content/uploads/cours/Taux.pdf>
- [5] G. Deelstra and F. Delbaen, Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term. *Appl, Stochastic Models Data Anal.*, 14(1) :77–84, 1998.
- [6] Damiano Brigo and Aurélien Alfonsi. Credit default swap calibration and derivatives pricing with the SSRD stochastic intensity model. *Finance Stoch.*, 9(1) :29–42, 2005.
- [7] JOHN C. COX, JONATHAN E. INGERSOLL, JR., STEPHEN A. Ross, A THEORY OF THE TERM STRUCTURE OF INTEREST RATES, *Econometrica*, Vol. 53, No. 2 (March, 1985).
- [8] Nicolas BARADEL, LANGAGE R : APPLICATION A LA STATISTIQUE, L'ACTUARIAT ET A LA FINANCE, *Economica*, 2015.
- [9] Pierre DEVOLDER Céline AZIZIEH, Magrabe option and life insurance with participation (*Bulletin Français d'Actuariat*, n°26.vol.13), 2013.
- [10] Eric BRICS. François De VARENNE, life Insurance in a Contingent Claim Framework : Pricing and Regulator Implication the Geneva Paper on Risk and Insurance Theory, 19 :53-72 (1994).
- [11] Anne Rita Bacinello. Pietro Millosovich. An Chen, The impact of longevity and investment risk on a portfolio of the insurance liabilities, Springer, (2018).
- [12] Fadoua Zeddouk. Pierre Devolder, Mean reversion in stochastic : why and how?, Springer, (04/07/2020).

Annexe 1

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
05-03-19	2,722	12-04-19	2,56	23-05-19	2,296	05-07-19	2,048	14-08-19	1,581
06-03-19	2,692	15-04-19	2,553	24-05-19	2,324	08-07-19	2,034	15-08-19	1,529
07-03-19	2,636	16-04-19	2,592	28-05-19	2,268	09-07-19	2,054	16-08-19	1,539
08-03-19	2,625	17-04-19	2,592	29-05-19	2,236	10-07-19	2,061	19-08-19	1,598
11-03-19	2,643	18-04-19	2,56	30-05-19	2,227	11-07-19	2,12	20-08-19	1,561
12-03-19	2,605	22-04-19	2,59	31-05-19	2,142	12-07-19	2,106	21-08-19	1,577
13-03-19	2,611	23-04-19	2,57	03-06-19	2,081	15-07-19	2,092	22-08-19	1,61
14-03-19	2,63	24-04-19	2,522	04-06-19	2,119	16-07-19	2,122	23-08-19	1,528
15-03-19	2,593	25-04-19	2,534	05-06-19	2,123	17-07-19	2,061	26-08-19	1,545
18-03-19	2,602	26-04-19	2,505	06-06-19	2,124	18-07-19	2,038	27-08-19	1,49
19-03-19	2,614	29-04-19	2,536	07-06-19	2,084	19-07-19	2,048	28-08-19	1,466
20-03-19	2,535	30-04-19	2,509	10-06-19	2,143	22-07-19	2,043	29-08-19	1,516
21-03-19	2,537	01-05-19	2,511	11-06-19	2,14	23-07-19	2,074	30-08-19	1,506
22-03-19	2,455	02-05-19	2,552	12-06-19	2,127	24-07-19	2,05	03-09-19	1,466
25-03-19	2,42	03-05-19	2,531	13-06-19	2,091	25-07-19	2,074	04-09-19	1,459
26-03-19	2,414	06-05-19	2,5	14-06-19	2,093	26-07-19	2,081	05-09-19	1,565
27-03-19	2,374	07-05-19	2,448	17-06-19	2,086	29-07-19	2,055	06-09-19	1,55
28-03-19	2,389	08-05-19	2,482	18-06-19	2,06	30-07-19	2,061	09-09-19	1,622
29-03-19	2,414	09-05-19	2,457	19-06-19	2,029	31-07-19	2,021	10-09-19	1,702
01-04-19	2,497	10-05-19	2,455	20-06-19	2,001	01-08-19	1,894	11-09-19	1,733
02-04-19	2,481	13-05-19	2,405	21-06-19	2,068	02-08-19	1,855	12-09-19	1,791
03-04-19	2,517	14-05-19	2,419	24-06-19	2,021	05-08-19	1,735	13-09-19	1,903
04-04-19	2,512	15-05-19	2,379	25-06-19	1,994	06-08-19	1,739	16-09-19	1,841
05-04-19	2,501	16-05-19	2,405	26-06-19	2,049	07-08-19	1,684	17-09-19	1,812
08-04-19	2,519	17-05-19	2,393	27-06-19	2,005	08-08-19	1,716	18-09-19	1,786
09-04-19	2,499	20-05-19	2,416	28-06-19	2	09-08-19	1,734	19-09-19	1,774
10-04-19	2,477	21-05-19	2,426	01-07-19	2,034	12-08-19	1,639	20-09-19	1,755
11-04-19	2,504	22-05-19	2,393	02-07-19	1,976	13-08-19	1,68	23-09-19	1,708
Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close		
24-09-19	1,635	01-11-19	1,728	13-12-19	1,819	28-01-20	1,641		
25-09-19	1,732	04-11-19	1,786	16-12-19	1,892	29-01-20	1,594		
26-09-19	1,685	05-11-19	1,866	17-12-19	1,889	30-01-20	1,558		
27-09-19	1,675	06-11-19	1,814	18-12-19	1,924	31-01-20	1,52		
30-09-19	1,675	07-11-19	1,926	19-12-19	1,908	03-02-20	1,52		
01-10-19	1,644	08-11-19	1,933	20-12-19	1,917	04-02-20	1,603		
02-10-19	1,596	11-11-19	1,943	23-12-19	1,935	05-02-20	1,649		
03-10-19	1,536	12-11-19	1,909	26-12-19	1,905	06-02-20	1,644		
04-10-19	1,515	13-11-19	1,87	27-12-19	1,874	07-02-20	1,578		
07-10-19	1,553	14-11-19	1,815	30-12-19	1,895	10-02-20	1,547		
08-10-19	1,537	15-11-19	1,834	31-12-19	1,919	11-02-20	1,59		
09-10-19	1,589	18-11-19	1,808	02-01-20	1,882	12-02-20	1,63		
10-10-19	1,658	19-11-19	1,786	03-01-20	1,788	13-02-20	1,617		
11-10-19	1,752	20-11-19	1,738	06-01-20	1,811	14-02-20	1,588		
14-10-19	1,733	21-11-19	1,772	07-01-20	1,827	18-02-20	1,556		
15-10-19	1,771	22-11-19	1,774	08-01-20	1,874	19-02-20	1,57		
16-10-19	1,748	25-11-19	1,764	09-01-20	1,858	20-02-20	1,525		
17-10-19	1,757	26-11-19	1,74	10-01-20	1,825	21-02-20	1,471		
18-10-19	1,747	27-11-19	1,767	13-01-20	1,848	24-02-20	1,377		
21-10-19	1,792	02-12-19	1,836	14-01-20	1,818	25-02-20	1,33		
22-10-19	1,768	03-12-19	1,709	15-01-20	1,788	26-02-20	1,31		
23-10-19	1,759	04-12-19	1,781	16-01-20	1,809	27-02-20	1,299		
24-10-19	1,766	05-12-19	1,797	17-01-20	1,836	28-02-20	1,127		
25-10-19	1,801	06-12-19	1,842	21-01-20	1,769	02-03-20	1,088		
28-10-19	1,853	09-12-19	1,829	22-01-20	1,769	03-03-20	1,01		
29-10-19	1,835	10-12-19	1,833	23-01-20	1,74	04-03-20	0,992		
30-10-19	1,798	11-12-19	1,79	24-01-20	1,681				
31-10-19	1,691	12-12-19	1,897	27-01-20	1,605				

FIGURE 4.2.1 – Taux d'intérêt journaliers de la période du 05/03/2019 au 05/03/2020

Annexe 2

Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close
05-03-19	3641,13989	12-04-19	3845,05005	27-05-19	3474,83008	04-07-19	3657,6499	13-08-19	3519,19995
06-03-19	3605,80005	15-04-19	3846,78003	28-05-19	3488,32007	05-07-19	3643,72998	14-08-19	3454,19995
07-03-19	3573,22998	16-04-19	3860,16992	29-05-19	3432,61011	08-07-19	3608,59009	15-08-19	3443,34009
08-03-19	3536,61011	17-04-19	3846,82007	30-05-19	3455,5	09-07-19	3587,90991	16-08-19	3498,38989
11-03-19	3568,87012	18-04-19	3852,30005	31-05-19	3427,17993	10-07-19	3589,72998	19-08-19	3522,41992
12-03-19	3579,58008	23-04-19	3806,97998	03-06-19	3420,05005	11-07-19	3571,12988	20-08-19	3488,16992
13-03-19	3597,40991	24-04-19	3752,19995	04-06-19	3458,38989	12-07-19	3578,37012	21-08-19	3525,25
14-03-19	3609,63989	25-04-19	3713,71997	05-06-19	3454,5	15-07-19	3622,63989	22-08-19	3510,11011
15-03-19	3640,26001	26-04-19	3727,62012	06-06-19	3440,37012	16-07-19	3649,63989	23-08-19	3479,19995
18-03-19	3660,80005	29-04-19	3737,82007	07-06-19	3457,46997	17-07-19	3626,12988	26-08-19	3487,04004
19-03-19	3688,48999	30-04-19	3743,66992	10-06-19	3483,95996	18-07-19	3620,70996	27-08-19	3502,18994
20-03-19	3655,63989	02-05-19	3718,03003	11-06-19	3516,28003	19-07-19	3652,41992	28-08-19	3490,82007
21-03-19	3654,65991	03-05-19	3715,37012	12-06-19	3500,78003	22-07-19	3680,48999	29-08-19	3526,12012
22-03-19	3588,72998	06-05-19	3681,80005	13-06-19	3492,1499	23-07-19	3723,58008	30-08-19	3570,81006
25-03-19	3560,67993	07-05-19	3595,95996	14-06-19	3463,70996	24-07-19	3726,46997	02-09-19	3573,30005
26-03-19	3591,57007	08-05-19	3574,86011	17-06-19	3450,81006	25-07-19	3735,15991	03-09-19	3562,42993
27-03-19	3614,57007	09-05-19	3492,38989	18-06-19	3513,07007	26-07-19	3735,94995	04-09-19	3588,53003
28-03-19	3601,07007	10-05-19	3504,03003	19-06-19	3525,56006	29-07-19	3735,36011	05-09-19	3619,54004
29-03-19	3658,71997	13-05-19	3452,16992	20-06-19	3518,52002	30-07-19	3673,09009	06-09-19	3617,11011
01-04-19	3713,6001	14-05-19	3495,1499	21-06-19	3505,47998	31-07-19	3701,42993	09-09-19	3647,75
02-04-19	3736,78003	15-05-19	3493,82007	24-06-19	3498,32007	01-08-19	3729,96997	10-09-19	3663,65991
03-04-19	3772,69995	16-05-19	3544,17993	25-06-19	3498,22998	02-08-19	3613	11-09-19	3677,36011
04-04-19	3782,21997	17-05-19	3511,45996	26-06-19	3497,32007	05-08-19	3525,88989	12-09-19	3697,65991
05-04-19	3805,38989	20-05-19	3476,48999	27-06-19	3513,46997	06-08-19	3505,48999	13-09-19	3730,23999
08-04-19	3793,08008	21-05-19	3494,93994	28-06-19	3547,45996	07-08-19	3526,05005	16-09-19	3700,18994
09-04-19	3790,20996	22-05-19	3488,75	01-07-19	3578,13989	08-08-19	3574,41992	17-09-19	3690,84009
10-04-19	3778,30005	23-05-19	3445,09009	02-07-19	3596,79004	09-08-19	3534,57007	18-09-19	3680,09009
11-04-19	3807,73999	24-05-19	3472,34009	03-07-19	3641,22998	12-08-19	3507,31006	19-09-19	3705,62012
Date	Close	Date	Close	Date	Close	Date	Close		
20-09-19	3738,71997	31-10-19	3763,25	11-12-19	3920,8501	24-01-20	4002,84009		
23-09-19	3693,46997	01-11-19	3794,80005	12-12-19	3931,6499	27-01-20	3903,5		
24-09-19	3678,15991	04-11-19	3829,19995	13-12-19	3936,1001	28-01-20	3956,11011		
25-09-19	3678,87988	05-11-19	3851,87012	16-12-19	3977,88989	29-01-20	3965,01001		
26-09-19	3697,72998	06-11-19	3859,70996	17-12-19	3963,81006	30-01-20	3927,86011		
27-09-19	3712,08008	07-11-19	3878,13989	18-12-19	3967,67993	31-01-20	3907,61011		
30-09-19	3714,41992	08-11-19	3876,93994	19-12-19	3985,29004	03-02-20	3929,27002		
01-10-19	3666,13989	11-11-19	3868,27002	20-12-19	3992,92993	04-02-20	4039,91992		
02-10-19	3566,37012	12-11-19	3898,47998	23-12-19	3989,61011	05-02-20	4103,04004		
03-10-19	3574,76001	13-11-19	3878,37012	24-12-19	3992,12988	06-02-20	4140,22998		
04-10-19	3610,63989	14-11-19	3870,27002	27-12-19	3996,3501	07-02-20	4095,19995		
07-10-19	3628,91992	15-11-19	3894,25	30-12-19	3967,17993	10-02-20	4101,79981		
08-10-19	3592,12012	18-11-19	3905,52002	31-12-19	3955,83008	11-02-20	4152,29981		
09-10-19	3607,55005	19-11-19	3897,43994	02-01-20	4015,92993	12-02-20	4184,27002		
10-10-19	3657,77002	20-11-19	3896,18994	03-01-20	3994,61011	13-02-20	4182,77979		
11-10-19	3727,91992	21-11-19	3873,92993	06-01-20	3971,78003	14-02-20	4185,43994		
14-10-19	3713,56006	22-11-19	3878,92993	07-01-20	3984,72998	17-02-20	4198,31006		
15-10-19	3757,23999	25-11-19	3902,92993	08-01-20	3980,68994	18-02-20	4164,5		
16-10-19	3761,02002	26-11-19	3904,31006	09-01-20	4013,97998	19-02-20	4139,25977		
17-10-19	3776,40991	27-11-19	3912,37988	10-01-20	4009,87988	20-02-20	4119,04004		
18-10-19	3757,78003	28-11-19	3914,86011	13-01-20	3984,58008	21-02-20	4078,43994		
21-10-19	3784,04004	29-11-19	3906,67993	14-01-20	3990,62988	24-02-20	3917,63989		
22-10-19	3768,47998	02-12-19	3864,11011	15-01-20	3970,71997	25-02-20	3828,3999		
23-10-19	3760,28003	03-12-19	3841,33008	16-01-20	3987,78003	26-02-20	3830,34009		
24-10-19	3791,65991	04-12-19	3889,40991	17-01-20	4007,19995	27-02-20	3639,51001		
25-10-19	3752,3501	05-12-19	3887,13989	20-01-20	4012,66992	28-02-20	3488,6001		
28-10-19	3770,84009	06-12-19	3929,05005	21-01-20	4018,8501	02-03-20	3523,23999		
29-10-19	3763,92993	09-12-19	3942,51001	22-01-20	4015,70996	03-03-20	3575,12988		
30-10-19	3767,32007	10-12-19	3927,62988	23-01-20	3978,30005	04-03-20	3597,97998		

FIGURE 4.2.2 – Cotations journalières de l'indice "BEL 20" du 05/03/2019 au 05/03/2020

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc