

Faculté des sciences

# Construction et étude des solutions de l'équation de Painlevé II

Auteur: Waltzing Simon

Promoteur: Tom Clayes

Lecteurs : Luc Haine – Heiner Olbermann

Année académique 2019-2020

Master [120] en sciences mathématiques, finalité approfondie



## Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. Première solution pour l'équation de Painlevé II	5
1. Résolution par un problème de Riemann-Hilbert	5
2. Comportement asymptotique d'une solution	10
Chapitre 2. Solutions rationnelles de $P_{II}$	17
1. Polynômes de Yablonsky-Vorob'ev	17
2. Formulation en un système hamiltonien	20
3. Solutions rationnelles de $P_{II}$	21
4. Solutions rationnelles sous forme de déterminants	24
5. Transformations de Bäcklund	25
Chapitre 3. Solutions non rationnelles de $P_{II}$ et applications	29
1. Solutions non rationnelles de $P_{II}$	29
2. Lien entre $P_{II}$ et l'équation de Kortweg-de Vries modifiée	31
3. La distribution de Tracy-Widom	32
Annexe A. Construction informatique des polynômes de Yablonsky-Vorob'ev	41
Conclusion	43
Bibliographie	45



## Introduction

Les équations différentielles ont toujours été un sujet d'étude important pour de nombreux mathématiciens. Un nombre considérable d'ouvrages et de travaux de recherche leur sont consacrés. Il est évidemment impossible de, ne serait-ce, qu'effleurer cette immensité dans un mémoire de fin d'étude. C'est pourquoi le sujet de ce mémoire ne va aborder qu'une seule équation différentielle, la seconde équation de Painlevé.

$$(0.1) \quad w''(z) = 2w(z)^3 + zw(z) + \alpha$$

pour  $\alpha$  une constante complexe.

Comme nous pouvons le comprendre grâce à son nom, la seconde équation de Painlevé fait partie d'un ensemble plus large. Afin de mieux cerner le sujet de ce mémoire, il nous paraît important d'expliquer en quelques mots en quoi cette seconde équation de Painlevé est le fruit d'une vaste recherche et d'une collaboration entre mathématiciens. Dès le milieu du 19<sup>ème</sup> siècle, des mathématiciens, dont Weierstrass, listent et étudient des équations différentielles aux points critiques fixes. Par là, nous entendons que la position de ces points critiques ne dépend pas de la condition initiale. Mais cette première étude se limite aux équations du premier ordre et indépendantes de la variable :

$$(0.2) \quad F(w', w) = 0.$$

Trente ans plus tard, les travaux de Funch généralisent ces résultats en retirant la dernière contrainte d'indépendance. C'est Henri Poincaré qui, le premier, aborde le problème lié aux équations du second ordre entre 1880 et 1885. Mais il ne parvient pas à obtenir des résultats satisfaisants. Quelques années plus tard, en 1892, un autre mathématicien français, Emile Picard formule le problème suivant : parmi les équations

$$(0.3) \quad w'' = F(w', w, z)$$

où  $F$  est rationnelle en  $w$  et  $w'$  et analytique en  $z$ , déterminez explicitement les équations à points critiques fixes.

C'est finalement un troisième mathématicien français, Paul Painlevé, qui, en 1900 et 1902, dans [11] et [12], est le premier à donner une réponse. C'est pourquoi les propriétés sur  $F$  et le fait que les singularités essentielles (qui sont isolées) des solutions sont indépendantes des conditions initiales sont appelées propriétés de Painlevé. Il va d'abord établir une liste réduite de cinquante équations. De ces équations, il est possible d'obtenir toute autre équation répondant au problème par une transformation de Möbius :

$$(0.4) \quad w \mapsto \frac{a(z)w + b(z)}{c(z)w + d(z)}, \quad z \mapsto \phi(z),$$

où  $a, b, c, d$  et  $\phi$  sont des fonctions localement analytiques.

Par la suite, il réduira encore le nombre d'équations jusqu'à trois. Quelques années plus tard, en 1910, Bertrand Gambier remarque un manque dans le dénombrement des équations [9]. Il va compléter la liste de Paul Painlevé en y ajoutant trois nouvelles équations. Dès lors, nous sommes en présence d'un ensemble de six équations. Elles sont nommées  $P_I - P_{VI}$  et sont aujourd'hui rédigées de la manière suivante :

$$(0.5) \quad w'' = 6w^2 + z,$$

$$(0.6) \quad w'' = 2w^3 + zw + \alpha,$$

$$(0.7) \quad w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w},$$

$$(0.8) \quad w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w},$$

$$(0.9) \quad w'' = \left( \frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right) (w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left( \alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1},$$

$$(0.10) \quad w'' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right) (w')^2 - \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right) w',$$

$$+ \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left( \alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2} \right),$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  des constantes arbitraires et  $'$  la dérivée complexe. Cette forme canonique a elle aussi été introduite par B. Gambier.

Maintenant que le contexte du sujet d'étude de ce mémoire est posé, il est temps d'en définir l'objectif. Concernant la construction et l'étude de solutions de la seconde équation de Painlevé, par la suite aussi nommée  $P_{II}$ , l'ambition de ce mémoire est de rassembler des informations issues de différents travaux de recherche, de les compléter, de les préciser et de les lier l'un à l'autre. L'apport de l'auteur ne se trouvera donc pas dans de nouveaux résultats, mais dans les liens effectués entre des résultats préexistants et dans leur complétion par des détails techniques.

Nous terminerons cette introduction en présentant le contenu de ce mémoire et la méthodologie suivie.

Nous allons commencer par construire une solution de  $P_{II}$  pour un cas particulier, celui où  $\alpha = 0$ . Pour cela, nous allons représenter le problème d'équation différentielle par un problème de Riemann-Hilbert en suivant un raisonnement établi dans plusieurs ouvrages ([1],[8]). Nous allons donc changer de stratégie afin de pouvoir utiliser les outils de l'analyse complexe. Le théorème principal de cette partie, et du mémoire, établit le lien entre la solution de la seconde équation de Painlevé et celle du problème de Riemann-Hilbert que nous aurons développé. Ce lien sera aussi utilisé pour établir le comportement asymptotique d'une solution de  $P_{II}$ . Là encore, nous utiliserons des outils d'analyse complexe. Il existe une autre formulation de cette stratégie appelée méthode d'isomonodromie([7],[8]). De plus, nous pouvons déjà remarquer qu'il n'existe pas de méthode directe pour construire une solution générale à une équation de Painlevé.

Mais cette recherche étant limitée à un cas particulier, nous allons, dans le chapitre deux, modifier nos méthodes pour une certaine généralisation. Nous allons utiliser des concepts plus algébriques et physiques, principalement des polynômes et un système hamiltonien ([13],[10]). Cela nous mènera à la construction de solutions rationnelles pour toutes les valeurs entières de  $\alpha$ . Cette méthode de la fin du 20ème siècle, début du 21ème, est une des approches possibles pour de tels résultats. Une autre approche, datant de la même période, utilise, elle, des déterminants. Nous l'aborderons aussi, mais moins en profondeur. La dernière étape de chapitre sera d'étudier les transformations de Bäcklund. Elles aussi développées à la fin du 20ème siècle, elles permettent d'établir une relation entre les solutions de différentes valeurs de  $\alpha$ .

Le dernier chapitre abordera quant à lui divers aspects liés à une étude plus

globale des solutions de la seconde équation de Painlevé. Premièrement, nous nous intéresserons à des solutions non rationnelles, permettant d'élargir le spectre des valeurs de  $\alpha$ . Deuxièmement, nous établirons un lien entre  $P_{II}$  et l'équation de Kortweg-de Vries. Finalement, nous étudierons un nouveau lien entre  $P_{II}$  et un domaine autre mathématique, les matrices aléatoire : plus précisément, l'utilisation de la solution construite dans le premier chapitre dans la définition de la distribution de Tracy-Widom ([1]). Cette dernière partie, utilisant elle aussi des outils d'analyse complexe, terminera ce mémoire.

## Première solution pour l'équation de Painlevé II

### 1. Résolution par un problème de Riemann-Hilbert

L'objectif de cette première section est de transformer la résolution d'une équation différentielle,  $P_{II}$ , en un problème de Riemann-Hilbert afin de construire une solution. Cela nous sera utile, comme nous le verrons dans la section suivante, pour déterminer le comportement asymptotique de la solution construite. Comme mentionné dans l'introduction, nous allons nous concentrer sur la seconde équation de Painlevé et, plus particulièrement, sur le cas où  $\alpha = 0$ .

Pour commencer, rappelons ce qu'est un problème de Riemann-Hilbert. Nous allons nous concentrer ici sur une forme bien particulière de cette classe de problème qui utilise les matrices. Dans ce cas, un problème de Riemann-Hilbert consiste à chercher une fonction  $Y$  à valeurs matricielles et qui possède trois propriétés : être analytique sur son domaine de définition, une relation de saut et un comportement asymptotique.

**DÉFINITION 1.1.** [4] *Soit  $\Sigma$  une courbe dans  $\mathbb{C}$ ,  $V$  une matrice  $2 \times 2$  de fonctions lisses sur  $\Sigma$ , telle que  $\det V \equiv 1$ . Alors, le problème de Riemann-Hilbert pour  $Y$  est le suivant :*

- $Y : \mathbb{C} \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$  est analytique.
- Les valeurs limites de  $Y$  en  $\Sigma$  existent et sont continues. De plus, elles respectent l'équation de saut suivante

$$(1.1) \quad Y_+(z) = Y_-(z)V(z), \quad z \in \Sigma.$$

- $\lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = \text{Id}_2$ .

Pour ce type de problème, il n'est pas garanti qu'il existe une solution. De plus, si l'existence est avérée, elle peut être difficile à démontrer. Par contre, si nous connaissons une solution, elle est unique. Nous allons revenir sur ce point un peu plus tard pour l'explorer en détail.

La suite de notre raisonnement consiste à construire un problème de Riemann-Hilbert spécifique et de le relier à la deuxième équation de Painlevé. Pour ce faire, nous allons suivre le raisonnement établi dans [1]. Il en est de même pour les énoncés des propositions et les trames des démonstrations.

Commençons par définir six demi-droites dans le plan complexe :

$$(1.2) \quad \Gamma_k = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}(k-1) \right\}, \quad k = 1, \dots, 6.$$

Elles divisent le plan complexe en six parties et constitueront la coupure du problème de Riemann-Hilbert, c'est-à-dire la courbe  $\Sigma$  de la définition.

A chacune de ces demi-droites, nous allons associer une matrice de saut triangulaire :

$$(1.3) \quad S_{2l-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{2l-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{2l} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2l} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, 3.$$

De plus, nous imposons des contraintes aux constantes  $s_k$  :

$$(1.4) \quad s_1 - s_2 + s_3 + s_1 s_2 s_3 = 0, \quad s_{k+3} = -s_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

En effet, pour que la solution soit acceptable, il faut qu'un point revienne sur lui-même après avoir tourné une fois autour de l'origine. Il aura alors traversé les six demi-droites. En termes mathématiques, cela donne :

$$(1.5) \quad S_1 S_2 S_3 \dots S_6 = \text{Id}_2.$$

Nous avons maintenant tous les outils pour poser le problème de Riemann-Hilbert et démontrer son lien avec la deuxième équation de Painlevé. Les trois conditions de base du problème sont alors,

- $Y(\lambda) : \mathbb{C} \setminus \cup_{k=1}^6 \Gamma_k \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$  est analytique.
- Les valeurs limites de  $Y(\lambda)$  en  $\cup_{k=1}^6 \Gamma_k$  sont continues et

$$(1.6) \quad Y_+(\lambda) = Y_-(\lambda) \exp^{-i\theta(\lambda)\sigma_3} S_k \exp^{i\theta(\lambda)\sigma_3}, \quad \lambda \in \Gamma_k \setminus \{0\}.$$

- $Y(\lambda)$  doit satisfaire la condition de normalisation suivante pour  $\lambda = \infty$  :

$$(1.7) \quad Y(\lambda) = \text{Id}_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

avec

$$(1.8) \quad \theta(\lambda) = \frac{4}{3}\lambda^3 + x\lambda$$

et où les matrices  $\sigma_j$  pour  $j = 1, 2, 3$  sont les matrices de Pauli :

$$(1.9) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas, nous devons ajouter une quatrième condition au problème. Nous allons imposer que la fonction  $Y(\lambda)$  soit bornée dans un voisinage de zéro. Cette condition supplémentaire sera nécessaire par la suite pour démontrer que de nouvelles fonctions sont elles aussi analytiques.

Comme mentionné plus haut, ce type de problème possède une unique solution si celle-ci existe. Une démonstration assez générale peut être donnée pour ce résultat. Mais nous devons alors imposer des conditions supplémentaires sur la courbe de saut. Et le problème de Riemann-Hilbert exposé ici ne rentre pas dans ces conditions plus strictes à cause de l'intersection des  $\Gamma_k$  en zéro. Nous allons donc donner une démonstration plus spécifique.

Supposons que  $Y$  et  $U$  soient deux solutions au problème de Riemann-Hilbert. Tout d'abord, remarquons que la fonction  $\det Y$  n'a pas de saut. En effet, nous avons l'équation suivante

$$(1.10) \quad \det Y_+ = \det Y_- \det \left( \exp^{-i\theta(\lambda)\sigma_3} \right) \det S_k \det \left( \exp^{i\theta(\lambda)\sigma_3} \right) = \det Y_-$$

car  $\det S_k = 1$ .

Dès lors, par le théorème de Morera, la fonction  $\det Y$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Ici intervient pour la première fois notre condition supplémentaire. Le fait que  $Y$  soit bornée dans un voisinage de zéro entraîne que la fonction  $\det Y$  soit entière.

Ensuite, remarquons que la fonction  $UY^{-1}$  n'a elle non plus pas de saut. De plus, par les mêmes arguments que dans le paragraphe précédent, c'est une fonction entière. Comme cette fonction tend vers la matrice identité à l'infini, nous avons que  $UY^{-1} \equiv \text{Id}_2$ . Donc  $U = Y$ .

Nous allons maintenant introduire un théorème précisant le comportement asymptotique contenu dans la troisième condition du problème de Riemann-Hilbert. Cette précision est nécessaire car elle définit les éléments nous permettant de construire notre solution de  $P_{\text{II}}$ .

THÉORÈME 1.2. Soit  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_6)$  les coefficients des matrices  $S_k$ . Alors, le problème de Riemann-Hilbert posé est uniquement et méromorphiquement solvable pour  $x$ . De plus, nous avons

$$(1.11) \quad Y(\lambda) \sim \text{Id}_2 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{m_j}{\lambda^j}, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

avec  $m_j(x)$  matrice à coefficients méromorphes.

Ce théorème ne sera pas démontré ici. Une démonstration pourra être trouvée dans [2].

Grâce au comportement asymptotique de la solution  $Y$ , nous pouvons énoncer le prochain théorème. Celui-ci nous donne une relation entre une solution de  $P_{\text{II}}$ , notée  $w$ , et le premier coefficient de la somme.

THÉORÈME 1.3. Si  $m_1(x, \mathbf{s})$  est le premier coefficient de la série, alors une solution de la deuxième équation de Painlevé est donnée par

$$(1.12) \quad w = w(x, \mathbf{s}) = 2(m_1(x, \mathbf{s}))_{12}.$$

La démonstration de ce théorème repose sur deux propositions :

PROPOSITION 1.4. Soit

$$(1.13) \quad \Psi(\lambda) = Y(\lambda) \exp^{-i\theta(\lambda)\sigma_3}.$$

Alors, il existe deux matrices  $A$  et  $U$  dont les coefficients sont des polynômes en  $\lambda$  et telles que

$$(1.14) \quad \begin{cases} \Psi_\lambda = A(\lambda)\Psi \\ \Psi_x = U(\lambda)\Psi. \end{cases}$$

De plus, ces matrices sont données par

$$(1.15) \quad A(\lambda) = -(4i\lambda^2 + ix + 2iw^2)\sigma_3 - 4\lambda w\sigma_2 - w'\sigma_1, \quad U(\lambda) = -i\lambda\sigma_3 - w\sigma_2,$$

où  $w$  est donnée par (1.12).

DÉMONSTRATION. Premièrement, nous pouvons remarquer que les matrices de saut,  $J_k(\lambda)$ , de  $\Psi$  sont constantes. En effet, nous avons que la relation suivante

$$(1.16) \quad \Psi_+(\lambda) = \Psi_-(\lambda)J_k(\lambda), \quad k = 1, \dots, 6$$

et la définition de  $\Psi$  impliquent les relation suivantes :

$$(1.17) \quad \begin{aligned} J_k(\lambda) &= \Psi_-^{-1}(\lambda)\Psi_+(\lambda) = \exp^{i\theta(\lambda)\sigma_3} Y_-(\lambda)^{-1} Y_+(\lambda) \exp^{-i\theta(\lambda)\sigma_3} \\ &= \exp^{i\theta(\lambda)\sigma_3} \exp^{-i\theta(\lambda)\sigma_3} S_k \exp^{-i\theta(\lambda)\sigma_3} \exp^{i\theta(\lambda)\sigma_3} = S_k. \end{aligned}$$

Deuxièmement, intéressons-nous aux deux dérivées logarithmiques  $\Psi_\lambda \Psi^{-1}$  et  $\Psi_x \Psi^{-1}$ . Grâce aux sauts constants, ces deux fonctions sont analytiques partout sauf en zéro. En effet, il est assez facile de remarquer que les matrices de saut des dérivées par rapport à  $\lambda$  et  $x$  sont aussi les matrices  $S_k$ . Dès lors,

$$(1.18) \quad \Psi_{\lambda_+} \Psi_+^{-1} = \Psi_{\lambda_-} S_k S_k^{-1} \Psi_-^{-1} = \Psi_{\lambda_-} \Psi_-^{-1},$$

$$(1.19) \quad \Psi_{x_+} \Psi_+^{-1} = \Psi_{x_-} S_k S_k^{-1} \Psi_-^{-1} = \Psi_{x_-} \Psi_-^{-1}.$$

Puisqu'il n'y a pas de saut, par le théorème de Morera, ces fonctions sont analytiques partout sauf en zéro. Pour régler le problème en zéro, nous utilisons le fait que  $\Psi$  est bornée proche de ce point critique. Dès lors, les dérivées logarithmiques sont entières et nous pouvons poser

$$(1.20) \quad A(\lambda) = \Psi_\lambda \Psi^{-1}, \quad U(\lambda) = \Psi_x \Psi^{-1}.$$

Il nous reste à déterminer la valeur des entrées de ces deux matrices. Pour cela, nous allons utiliser le comportement asymptotique décrit plus haut. Il en découle que

$$(1.21) \quad \Psi(\lambda) = \left( \text{Id}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{\lambda^k} \right) \exp^{-i\theta(\lambda)\sigma_3}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Donc, nous pouvons en déduire le comportement de la première dérivée logarithmique :

$$(1.22) \quad A(\lambda) = \left( \text{Id}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{\lambda^k} \right) (-4i\lambda^2 \sigma_3 - ix\sigma_3) \left( \text{Id}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{\lambda^k} \right)^{-1} \\ + \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-km_k}{\lambda^{k+1}} \right) \left( \text{Id}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{\lambda^k} \right)^{-1}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Cette équation implique que la matrice  $A(\lambda)$  doit être de la forme

$$(1.23) \quad A(\lambda) = A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Il reste à déterminer  $A_2, A_1$  et  $A_0$ . Remarquons d'abord que le second terme à droite dans (1.22) n'intervient pas. Ensuite, pour  $A_2$ , nous pouvons remarquer qu'il n'existe qu'un seul terme en  $\lambda^2$  qui est  $-4i\sigma_3$ . En procédant à un développement général, nous obtenons que

$$(1.24) \quad A_1 = 4i[\sigma_3, m_1] = 4i(\sigma_3 m_1 - m_1 \sigma_3) = 4w\sigma_2,$$

et

$$(1.25)$$

$$A_0 = 4i(\sigma_3 m_2 - m_2 \sigma_3) - ix\sigma_3 - 4i(\sigma_3 m_1 - m_1 \sigma_3)m_1 = -2iw^2\sigma_3 - ix\sigma_3 - w'\sigma_1.$$

Cela nous donne la valeur de  $A$  énoncée ci-dessus. Pour la matrice  $U(\lambda)$ , il nous suffit d'utiliser le même procédé et nous arrivons à  $U(\lambda) = U_1\lambda + U_0 + O(\frac{1}{\lambda})$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , avec

$$(1.26) \quad U_1 = -i\sigma_3, \quad U_0 = -i[\sigma_3, m1] = -w\sigma_2.$$

□

La deuxième proposition est la suivante.

PROPOSITION 1.5. *La deuxième équation de Painlevé est équivalente à la relation matricielle suivante :*

$$(1.27) \quad U_\lambda(\lambda) - A_x(\lambda) = [A(\lambda), U(\lambda)]$$

avec  $A$  et  $U$  définies par la proposition précédente.

DÉMONSTRATION. La démonstration est réduite à du calcul. Trouvons d'abord les deux dérivées

$$(1.28) \quad A_x(\lambda) = \begin{pmatrix} -2i(2w)w' - i & 4\lambda w' + 2iw'' \\ 4\lambda w' - 2iw'' & 2i(2w)w' + i \end{pmatrix}, \quad U_\lambda(\lambda) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Puis, calculons

$$(1.29) \quad U_\lambda(\lambda) - A_x(\lambda) - [A(\lambda), U(\lambda)] = \begin{pmatrix} 0 & 2iw'' - 4iw^3 - 2iwx \\ -2iw'' + 4iw^3 + 2iwx & 0 \end{pmatrix}$$

Dès lors, égaliser cette relation matricielle à zéro est équivalent aux deux relations suivantes :

$$(1.30) \quad 2iw'' - 4iw^3 - 2iwx = 0 \quad -2iw'' + 4iw^3 + 2iwx = 0$$

Ce qui correspond à l'équation  $P_{II}$ .

□

Le théorème est un corollaire évident des deux propositions. Il nous donne une solution de la seconde équation de Painlevé pour le cas  $\alpha = 0$ . De plus comme annoncé, cette solution est construite grâce à un problème de Riemann-Hilbert.

## 2. Comportement asymptotique d'une solution

Dans cette section, nous allons étudier le comportement asymptotique des solutions des équations de Painlevé. Nous allons nous concentrer sur  $P_{II}$  telle que  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire le cas traité dans la section précédente. En effet, nous allons à nouveau utiliser cette représentation sous la forme d'un problème de Riemann-Hilbert pour décrire le comportement asymptotique de la solution construite plus haut. Celui-ci est donné par le théorème suivant :

**THÉOREME 1.6.** *Soit  $w(x, a)$  une solution de  $P_{\text{II}}$  comme décrit ci-dessus. Supposons aussi que, avec les notations de la section précédente, nous ayons les relations suivantes :*

$$(1.31) \quad s_2 = 0, \quad s_1 = -s_3 = -ia, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Alors le comportement asymptotique de  $w(x, a)$  pour  $x \rightarrow +\infty$  est donné par

$$(1.32) \quad w(x, a) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-\frac{3}{2}x^{3/2}} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

**DÉMONSTRATION.** La première partie de cette démonstration se compose de plusieurs simplifications du problème de Riemann-Hilbert associé à  $P_{\text{II}}$ . Elles auront pour objectif principal de lisser les lignes de saut et de réduire leur nombre.

C'est pour cela que nous imposons les conditions supplémentaires en (1.31). Par (1.4), ces conditions impliquent aussi que

$$(1.33) \quad s_5 = 0, \quad s_6 = -s_4 = -ia, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Concentrons-nous sur la condition portant sur  $s_2$ . Elle implique que la matrice de saut  $\exp^{-i\theta(\lambda)\sigma_3} S_2 \exp^{-i\theta(\lambda)\sigma_3}$  est triviale. Il en va de même pour  $k = 5$ . Nous pouvons donc limiter notre division du plan complexe à un découpage en quatre morceaux. Dès lors, la première version du problème devient :

- $Y(\lambda)$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_6)$ .
  - Les valeurs limites de  $Y(\lambda)$  en  $\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_6$  sont continues et
- $$(1.34) \quad Y_+(\lambda) = Y_-(\lambda) \exp^{-i\theta(\lambda)\sigma_3} S_k \exp^{i\theta(\lambda)\sigma_3}, \quad \lambda \in \Gamma_k, \quad k = 1, 3, 4, 6.$$
- $Y(\lambda)$  doit satisfaire la condition de normalisation suivante pour  $\lambda \rightarrow \infty$  :

$$(1.35) \quad Y(\lambda) = \text{Id}_2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Nous allons maintenant reformuler le problème après changement de variable. C'est une étape intermédiaire qui nous mènera à une nouvelle simplification. Posons donc le changement de variable suivant :

$$(1.36) \quad \lambda \mapsto z = \lambda x^{-\frac{1}{2}}, \quad X(z) := Y\left(x^{\frac{1}{2}}z\right).$$

Le premier impact de cette modification porte sur la deuxième condition du problème et plus particulièrement sur la fonction  $\theta(\lambda, x)$  :

$$(1.37) \quad \theta(\lambda, x) = \frac{4}{3}\lambda^3 + x\lambda = \frac{4}{3}\lambda^3 x^{-\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \lambda = x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{3}z^3 + z\right).$$

Posons

$$(1.38) \quad t = x^{\frac{3}{2}}, \quad \phi(z) = \frac{4}{3}iz^3 + iz.$$

Nous avons alors que

$$(1.39) \quad -i\theta(\lambda) = -t\phi(z).$$

Remarquons que la fonction  $\phi$  admet deux points de selle.

$$(1.40) \quad \frac{d}{dz}\phi(z) = iz^2 + i = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = \frac{-1}{4} \quad \Rightarrow \quad z = \pm \frac{i}{2}$$

Nous voulons maintenant nous inspirer de la méthode de "steepest descent" ou méthode du point de selle. Cette méthode nous permettra de trouver le comportement asymptotique d'une intégrale. Pour cela, nous devons trouver, pour chaque point de selle de la fonction  $\phi$ , un chemin  $\gamma$  qui passe par le point et qui est tel que  $\text{Im}(\phi(\gamma))$  est constant. La constante est donnée par la valeur en  $\pm \frac{i}{2}$  :

$$(1.41) \quad \text{Im}\left(\phi\left(\frac{i}{2}\right)\right) = \text{Im}\left(\frac{4}{3}i\left(\frac{i}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\right) = \text{Im}\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

Nous devons donc trouver  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ , deux chemins tels que  $\text{Im}(\phi(\gamma)) = 0$ .

Soit  $a + bi \in \mathbb{C}$ . Alors,

$$(1.42) \quad \phi(a + bi) = \frac{4}{3}i(a^3 - ib^2 + 3ia^2b - 3ab^2) + ia - b,$$

et

$$(1.43) \quad \text{Im}(\phi(a + bi)) = \frac{4}{3}a^3 + a - 4ab^2.$$

Égalons cette dernière équation à zéro et dessinons le graphe qui correspond.

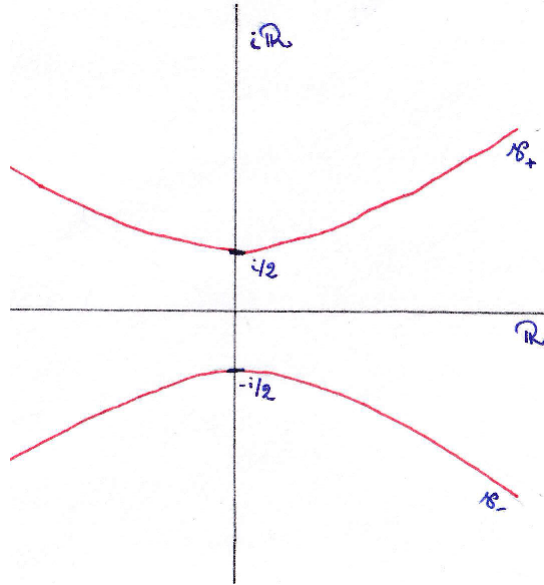


FIGURE 1. Nouvelles courbes de saut

Nous pouvons facilement remarquer, grâce au dessin, que les couples  $\{\Gamma_3, \Gamma_1\}$ ,  $\{\Gamma_4, \Gamma_6\}$  sont des asymptotes pour  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  respectivement. De manière inverse,  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  sont des déformations continues du couple qui leur est associé. Cette remarque nous permet de modifier les lignes de saut que nous utilisons dans le problème.

Par cette déformation, la ligne de saut  $\Gamma_2$  est maintenant restreinte à l'ensemble  $\{ib | b \in \mathbb{R}, b \geq 1/2\}$  et  $\Gamma_5$  à  $\{ib | b \in \mathbb{R}, b \leq -1/2\}$ . Comme nous avons vu que sur ces lignes le saut est trivial, nous ne devons pas nous en occuper.

Il reste la dernière partie de la droite imaginaire. Elle est le résultat de la déformation du point d'origine  $0 \in \mathbb{C}$ . Comme lui, cette ligne de saut pose un problème. Mais, en fait, nous ne devons pas en tenir compte. En effet, la matrice de saut sur cette ligne est la matrice identité. Vérifions cela par un calcul simple. La matrice de saut entre  $Y_1$  et  $Y_3$  doit correspondre au produit de  $\exp^{-t\phi(z)\sigma_3} S_1 \exp^{t\phi(z)\sigma_3}$  et  $\exp^{-t\phi(z)\sigma_3} S_3 \exp^{t\phi(z)\sigma_3}$ . Ce qui correspond à

$$(1.44) \quad \exp^{-t\phi(z)\sigma_3} S_1 S_3 \exp^{t\phi(z)\sigma_3} = \begin{pmatrix} \exp^{-t\phi(z)} & 0 \\ 0 & \exp^{t\phi(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp^{t\phi(z)} & 0 \\ 0 & \exp^{-t\phi(z)} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \exp^{-t\phi(z)} \exp^{t\phi(z)} & 0 \\ \exp^{2t\phi(z)}(s_1 + s_3) & \exp^{-t\phi(z)} \exp^{t\phi(z)} \end{pmatrix} = \text{Id}_2.$$

La dernière égalité provient des deux relations suivantes :

$$(1.45) \quad \exp^{-t\phi(z)} \exp^{t\phi(z)} = 1 \quad \text{et} \quad s_1 + s_3 = s_2 - s_1 s_2 s_3 = 0.$$

La deuxième relation est obtenue par (1.4) et (1.31).

Par la modification des lignes et des matrices de saut, nous avons modifié le problème de Riemann-Hilbert. Cela correspond aux deux premières conditions d'un problème de Riemann-Hilbert. Mais, il se fait que la condition de normalisation asymptotique a aussi été modifiée par le changement de variable. Dès lors, le problème est devenu

- $X(z)$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus (\gamma_+ \cup \gamma_-)$ .
- $X_+(z) = X_-(z)G_X(z)$ ,  $z \in \gamma_+ \cup \gamma_-$
- $X(z)$  doit satisfaire la condition de normalisation suivante pour  $z \rightarrow \infty$  :

$$(1.46) \quad X(z) \sim \text{Id}_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j^X}{z^j}.$$

Nous avons modifié le comportement asymptotique. Dès lors, l'équation (1.12) devient

$$(1.47) \quad w(x) = 2\sqrt{x}(m_1^X)_{12}.$$

Il reste aussi à déterminer les matrices de saut  $G_X(z)$  au nombre de deux. La matrice de saut pour  $\gamma_+$  correspond au passage entre  $Y_1$  et  $Y_2$ . Donc,

$$(1.48) \quad G_{X_{\gamma_+}}(z) = \exp^{-t\phi(z)\sigma_3} S_1 \exp^{t\phi(z)\sigma_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 \exp^{2t\phi(z)} & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \gamma_+.$$

Il en va de même pour  $G_{X_{\gamma_-}}$  qui correspond au passage entre  $Y_6$  et  $Y_1$ .

$$(1.49) \quad G_{X_{\gamma_+}}(z) = \begin{pmatrix} 1 & s_6 \exp^{-2t\phi(z)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \gamma_+.$$

Pour que le problème soit bien posé, il faut aussi que la matrice de saut soit la même pour tout  $z \in \gamma_{\pm}$ . Or, pour construire  $G_{X_{\gamma_{\pm}}}$ , nous n'avons pris en compte qu'une moitié des chemins. C'est ici qu'intervient la condition  $s_1 = -s_3 = -ia$  pour  $a \in \mathbb{R}$ . En effet, nous avons alors que  $S_1 = S_3^{-1}$  et  $S_4 = S_6^{-1}$ . Ces deux égalités réglant notre problème.

Comme nous l'avons dit plus haut, les deux contours  $\gamma_{\pm}$  sont construits pour la méthode de "steppest descent". Nous allons maintenant l'appliquer sur  $\gamma_+$  et l'intégrale  $\int_{\gamma_+} s^2 \exp^{4t\phi(z)} dz$  pour  $t \rightarrow \infty$ . Pour cela nous devons vérifier six conditions :

- (1)  $\gamma_+ : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^1$ .
- (2)  $\operatorname{Re}(2\phi(\gamma_+))$  admet un unique maximum en  $z_0 = \frac{i}{2}$  comme vu précédemment. Il faut en plus que cette fonction tende suffisamment vite vers 0 pour  $z \rightarrow \infty$ .
- (3) Par construction de  $\gamma_+$ ,  $\operatorname{Im}(2\phi(z))$  est constante sur le chemin.
- (4)  $2\phi$  est une fonction entière donc elle admet une extension analytique près de  $\frac{i}{2}$ .
- (5)  $2\phi''\left(\frac{i}{2}\right) = -8 \neq 0$
- (6)  $s$  est une constante. Elle est donc entière et bornée sur tout  $\mathbb{C}$ .

Dès lors, nous avons que

$$(1.50) \quad \int_{\gamma_+} s^2 \exp^{4t\phi(z)} dz \sim C \exp^{4t\phi(i/2)} \sqrt{t^{-1}} = C \exp^{\frac{2}{3}x^{3/2}} x^{3/8}.$$

Cette méthode est tirée de [3] où elle est aussi démontrée dans sa version générale. Cela implique un contrôle sur la norme  $L^2$  de  $\operatorname{Id}_2 - G_X$  :

$$(1.51) \quad \|\operatorname{Id}_2 - G_X\|_{L^2(\gamma_+)} \leq C \exp^{-\frac{2}{3}x^{-3/2}} x^{-3/8}.$$

Il est évidemment possible d'obtenir une telle majoration pour la norme  $L^2$  sur  $\gamma_-$ .

Nous pouvons aussi obtenir une majoration de la norme  $L^\infty$  et ce pour les deux chemins :

$$(1.52) \quad \|\text{Id}_2 - G_X\|_{L^\infty(\gamma)} \leq C \exp^{-\frac{2}{3}x^{-3/2}}.$$

Une solution au problème de Riemann-Hilbert qui nous concerne admet la représentation intégrale suivante :

$$(1.53) \quad X(z) = \text{Id}_2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} \rho(z')(G_X(z') - \text{Id}_2) \frac{dz'}{z' - z}$$

où  $\rho(z)$  est la solution de l'équation suivante :

$$(1.54) \quad \rho = \text{Id}_2 + C_-[\rho(G_X - \text{Id}_2)]$$

pour

$$(1.55) \quad C_-[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{z_0 \rightarrow z_-} \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} f(z') \frac{dz'}{z' - z_0}.$$

L'unicité de cette solution est garantie par les estimées (1.51) et (1.52) associées au fait que l'opérateur de Cauchy est borné dans  $L^2$ . Cela garantit aussi l'estimation suivante :

$$(1.56) \quad \|I - \rho\|_{L^2} \leq C \exp^{-\frac{2}{3}x^{-3/2}} x^{-3/8}.$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [6]

De la représentation intégrale d'une solution, nous pouvons obtenir le premier coefficient de la série asymptotique :

$$(1.57) \quad m_1^X = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} \rho(z)(G_X(z) - \text{Id}_2) dz.$$

Par la relation (1.47), nous obtenons une première représentation pour la solution :

$$(1.58) \quad w(x) = \frac{1}{\pi} x^{1/2} \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} [\rho(z)(G_X(z) - \text{Id}_2)]_{12} dz.$$

Par les estimations (1.51) et (1.56), nous avons que, pour  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$(1.59) \quad \begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{\pi} x^{1/2} \int_{\gamma_+ \cup \gamma_-} (G_X(z) - \text{Id}_2)_{12} dz + O\left(\frac{\exp^{-4/3x^{3/2}}}{x^{1/4}}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} x^{1/2} s \int_{\gamma_-} \exp^{-2t\phi(z)} dz + O\left(\frac{\exp^{-4/3x^{3/2}}}{x^{1/4}}\right) = i s Ai(x) + O\left(\frac{\exp^{-4/3x^{3/2}}}{x^{1/4}}\right) \end{aligned}$$

qui peut se reformuler comme l'énoncé du théorème. Cela termine donc la démonstration.  $\square$

Cette démonstration termine le premier chapitre. Nous avons donc établi un lien entre un cas spécifique de  $P_{II}$  ( $\alpha = 0$ ) et un problème de Riemann-Hilbert. Ce lien nous a permis de construire une solution pour cette équation différentielle et de comprendre son comportement asymptotique.

Dans le chapitre suivant, nous allons élargir la construction de solutions à d'autres cas de  $P_{II}$  et à d'autres méthodes de calcul.

## Solutions rationnelles de $P_{II}$

Dans le premier chapitre, nous avons étudié le cas particulier de l'équation  $P_{II}$  où la constante  $\alpha$  était égale à zéro. Nous allons, dans ce chapitre, nous intéresser au cas où  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

Des solutions à ces équations peuvent se trouver selon plusieurs méthodes. Nous allons explorer plus en détail une procédure exploitant des polynômes ainsi que la formulation de  $P_{II}$  en un système hamiltonien. Cela nous occupera pendant les trois premières sections. Nous verrons aussi dans la quatrième section qu'il existe des formulations alternatives utilisant des déterminants. A la fin du chapitre, nous nous intéresserons à des transformations de solutions.

### 1. Polynômes de Yablonsky-Vorob'ev

Afin de construire des solutions rationnelles à la seconde équation de Painlevé, nous allons introduire dans cette section les polynômes de Yablonsky-Vorob'ev. Les polynômes de Yablonsky-Vorob'ev (YV) sont une suite de fonctions rationnelles construites par récurrence.

Posons les conditions initiales :

$$(2.1) \quad P_0(t) = 1 \quad P_1(t) = t.$$

La relation de récurrence est alors la suivante :

$$(2.2) \quad P_{n+1} = \frac{tP_n^2 - 4(P_nP_n'' - P_n'^2)}{P_{n-1}}.$$

Nous pouvons calculer les premiers éléments de la suite à la main :

$$(2.3) \quad P_2(t) = t^3 + 4 \quad P_3(t) = t^6 + 20t^3 - 80 \quad P_4(t) = t^{10} + 60t^7 + 11200t, \dots$$

Nous remarquons que le degré augmente rapidement. Pour plus de facilité, nous pouvons implémenter la récurrence sur un programme, tel que Matlab (créé par l'auteur). Ce programme se trouve en annexe. Remarquons qu'il faut être attentif à la numérotation des polynômes produits par l'algorithme car elle commence à  $P_1$  et non à  $P_0$ .

Au vu de toutes ces constructions, nous pouvons remarquer que tous les  $P_n$  sont bien des polynômes et non des fonctions rationnelles quelconques. Cette observation empirique peut en fait se transformer en proposition. Dans la démonstration de celle-ci, il sera aussi montré deux lemmes portants sur les racines des polynômes YV.

La suite de cette section est tiré de [13].

PROPOSITION 2.1. *Pour tout entier non négatif  $n$ ,  $P_n$  est un polynôme.*

LEMME 2.2.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = 0$  n'admet que des racines simples.

LEMME 2.3.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = 0$  et  $P_{n-1} = 0$  n'ont pas de racines en commun.

DÉMONSTRATION. Pour démarrer cette démonstration, nous allons ré-écrire la relation (2.2) à l'aide d'un opérateur dérivé. Pour cela, posons

$$(2.4) \quad l_t(f) = f \frac{d^2 f}{dt^2} - \left( \frac{df}{dt} \right)^2,$$

et aussi

$$(2.5) \quad l_t(f, g) = f \left( \frac{d^2 g}{dt^2} \right) - \left( \frac{df}{dt} \right) \left( \frac{dg}{dt} \right) + \left( \frac{d^2 g}{dt^2} \right) g$$

pour des fonctions  $f, g$  à variable unique  $t$ . Dès lors, nous avons

$$(2.6) \quad P_{n+1} = \frac{tP_n^2 - 4l_t(P_n)}{P_{n-1}}.$$

La suite de la démonstration se fait par récurrence. La première étape est de vérifier la proposition et les deux lemmes pour le point de départ de la récurrence. Pour cela, nous pouvons reprendre les polynômes  $P_0, P_1$  et  $P_2$  calculés plus haut. Dès lors, remarquons que la proposition et le premier lemme sont exacts pour  $0 \leq n \leq 3$  et le deuxième lemme pour  $1 \leq n \leq 3$ .

Maintenant, pour la deuxième étape, nous supposons que les trois énoncés sont corrects pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $3 \leq n \leq N$ . Nous allons alors démontrer leur véracité pour  $n = N + 1$ .

Soit  $Q$  un polynôme arbitraire et  $h = tQ^2 - 4l_t(Q)$ . Alors, nous avons

$$(2.7) \quad \begin{aligned} h' &= Q^2 + 2tQQ' - 4(QQ''' - Q'Q'') \\ &= 4Q'Q'' + Q \times \text{un polynôme,} \end{aligned}$$

et

$$(2.8) \quad \begin{aligned} h'' &= 4QQ' + 2tQ'^2 + 2tQQ'' - 4(QQ'''' - Q''^2) \\ &= 2tQ'^2 + 4Q''^2 + Q \times \text{un polynôme.} \end{aligned}$$

Appliquons l'opérateur  $l_t$  à la fonction  $h$  :

$$(2.9) \quad \begin{aligned} l_t(h) &= hh'' - h'^2 \\ &= 8tQ'^4 + Q \times \text{un polynôme.} \end{aligned}$$

Nous voulons maintenant trouver un diviseur de  $Q$ . Pour cela, remarquons que

$$(2.10) \quad 2th^2 - 4l_t(h) = Q \times \text{un polynôme.}$$

Dès lors,

$$(2.11) \quad Q \mid 2th^2 - 4l_t(h).$$

Si nous posons  $Q = P_{N-1}$ , alors par (2.2), nous obtenons que  $h = P_N P_{N-2}$ . En plaçant ces résultats dans l'équation précédente, nous obtenons

$$(2.12) \quad P_{N-1} \mid 2tP_{N-2}^2 P_N^2 - 4l_t(P_{N-2} P_N).$$

En appliquant la règle de Leibnitz à l'opérateur  $l_t$ , nous avons

$$(2.13) \quad \begin{aligned} 2tP_{N-2}^2 P_N^2 - 4l_t(P_{N-2} P_N) &= P_{N-2}^2 (tP_N^2 - 4l_t(P_N)) + P_N^2 (tP_{N-2}^2 - 4l_t(P_{N-2})) \\ &= P_{N-2}^2 (tP_N^2 - 4l_t(P_N)) + P_N^2 P_{N-3} P_{N-1}. \end{aligned}$$

Dès lors, nous voyons que

$$(2.14) \quad P_{N-1} \mid tP_N^2 - 4l_t(P_N).$$

Par (2.2), nous pouvons conclure que  $P_{N+1}$  est un polynôme.

Supposons maintenant que  $P_N = 0$  et  $P_{N+1} = 0$  ont une racine  $r$  en commun. Alors, par (2.2), nous avons que  $P_N'(r) = 0$ . Donc, pour  $P_N$ ,  $r$  est au moins une racine double. Cela contredit notre hypothèse de récurrence. Dès lors,  $P_N = 0$  et  $P_{N+1} = 0$  n'ont pas de racine en commun.

Nous devons encore démontrer le lemme 2. Pour cela, nous allons introduire la relation suivante :

$$(2.15) \quad P'_{n+1} P_{n-1} - P_{n+1} P'_{n-1} = (2n+1)P_n^2.$$

Dès lors, si  $P_{N+1}$  possède une racine  $r$  non simple, la relation nous donne que  $P_N(r) = 0$ . Encore une fois, nous obtenons une contradiction. Cela termine la démonstration.  $\square$

Grâce à cette démonstration, nous savons que les fonctions  $P_n$  sont des polynômes. Cette propriété spécifique nous sera utile par la suite. Mais avant, nous devons encore introduire un point technique, la formulation en système hamiltonien.

## 2. Formulation en un système hamiltonien

Dans cette section, nous allons voir qu'il est possible de réécrire l'équation  $P_{II}$  en un système hamiltonien. Le raisonnement est, comme pour la section suivante, tiré de [13]. Pour cela, nous devons définir ce système et établir une équivalence entre lui et la deuxième équation de Painlevé. Cela nous permettra, dans la section suivante, de définir une solution en passant par les polynômes YV de la première section du chapitre.

Dès lors, posons l'Hamiltonien suivant :

$$(2.16) \quad H(\alpha, w, u) = \frac{1}{2}u^2 - \left(w^2 + \frac{1}{2}z\right)u - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)w.$$

Nous avons alors le système suivant :

$$(2.17) \quad \begin{cases} \frac{dw}{dz} = \frac{\partial H}{\partial u} = u - w^2 - \frac{z}{2} \\ \frac{du}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial w} = 2wu + \alpha + \frac{1}{2} \end{cases}$$

qui est équivalent à l'équation  $P_{II}$  pour  $w$

$$(2.18) \quad w'' = 2w^3 + zw + \alpha.$$

En effet, si  $(w, u)$  est une solution de (2.17), alors, nous avons que

$$\begin{aligned} w'' &= u' - 2wu' - \frac{1}{2} \\ &= 2wu + \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2w\left(u - w^2 - \frac{z}{2}\right) \\ &= \alpha + 2w^3 + zw \Rightarrow P_{II}. \end{aligned}$$

De plus, si  $w$  est une solution de (2.18), nous posons

$$(2.19) \quad u = w' + w^2 + \frac{1}{2}z.$$

Nous avons alors que

$$\begin{aligned} u' &= w'' + 2ww' + \frac{1}{2} \\ &= 2w^3 + zw + \alpha + 2w\left(u - w^2 - \frac{1}{2}z\right) + \frac{1}{2} \\ &= zw + \alpha + 2wu - wz + \frac{1}{2} \\ &= 2wu + \alpha + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui correspond à (2.17). En conclusion, si nous trouvons une solution du système hamiltonien, nous aurons une solution de la seconde équation de Painlevé donnée par  $w$ . La fonction  $u$  est en fait une solution d'une autre équation de Painlevé, nommée  $P_{34}$ , qui est équivalente à  $P_{II}$ .

### 3. Solutions rationnelles de $P_{II}$

Dans les deux sections précédentes, nous avons mis en place les différents outils afin de construire des solutions rationnelles de  $P_{II}$ . Ce processus se fera en plusieurs étapes. Durant celui-ci, nous allons utiliser les résultats mentionnés dans le début du chapitre.

La première étape est de définir trois transformations des solutions. Dans cette section, nous nous limiterons à la citation de ces transformations. Les calculs et vérifications seront effectués dans la section sur les transformations de Blacklund.

Notons  $S(\alpha)$  l'ensemble des solutions de (2.17) pour le paramètre  $\alpha$ . Nous pouvons dès lors définir la première transformation  $I^\alpha : S(\alpha) \rightarrow S(-\alpha - 1)$  par

$$(2.20) \quad I^\alpha(w, u) = \begin{cases} \left( w + \frac{\alpha + 1/2}{u}, u \right), & \text{si } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ (w, u), & \text{si } \alpha = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Remarquons que, si  $u = 0$ , alors

$$(2.21) \quad \frac{du}{dz} = 0 = \alpha + \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Il n'y a donc pas de problème de définition.

Définissons aussi les transformations  $T_-^\alpha : S(\alpha) \rightarrow S(\alpha - 1)$  et

$T_+^\alpha : S(\alpha) \rightarrow S(\alpha + 1)$  :

$$(2.22) \quad T_-^\alpha(w, u) = \begin{cases} \left( -w - \frac{\alpha - 1/2}{2w^2 - u + z}, 2w^2 - u + z \right), & \text{si } \alpha \neq -\frac{1}{2}, \\ (-w, 2w^2 - u + z), & \text{si } \alpha = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$(2.23) \quad T_+^\alpha(w, u) = \begin{cases} \left( -w - \frac{\alpha + 1/2}{u}, 2 \left( w + \frac{\alpha + 1/2}{u} \right)^2 - u + z \right), & \text{si } \alpha \neq -\frac{1}{2}, \\ (-w, 2w^2 - u + z), & \text{si } \alpha = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

La deuxième étape est de construire une récurrence sur les solutions et l'utiliser pour réécrire les relations explorées plus haut. Pour cela, prenons

un complexe  $\gamma \in \mathbb{C}$  et un entier  $n \geq 0$  et définissons la relation suivante

$$(2.24) \quad (w_{\gamma-n}, u_{\gamma-n}) = T_-^{\gamma-(n-1)}(w_{\gamma-(n-1)}, u_{\gamma-(n-1)}).$$

Le début de la récurrence se fait avec  $(w_\gamma, u_\gamma)$ . Le choix de  $\gamma$  est soumis à une contrainte. Nous devons faire en sorte que  $\gamma \notin 1/2 + \mathbb{Z}$ . Mais cette contrainte n'est pas importante pour nous car nous nous intéressons au cas où  $\alpha$  est entier. Nous verrons aussi dans le chapitre suivant que le cas  $\alpha = 1/2$  fait appel à des notions plus particulières. Maintenant, prenons  $\beta \in \gamma + \mathbb{Z}$ . Nous posons alors

$$(2.25) \quad h(\beta) = H(\beta, w_\beta, u_\beta).$$

Par la définition de l'Hamiltonien (2.16) et la relation de récurrence (2.24), nous avons alors une nouvelle relation :

$$(2.26) \quad \begin{aligned} h(\beta-1) &= H(\beta-1, w_{\beta-1}, u_{\beta-1}) \\ &= \frac{1}{2}(2w_\beta^2 - u_\beta + z)^2 - \left( \left[ -w_\beta - \frac{\beta-1/2}{2u_\beta^2 - u_\beta + z} \right]^2 + \frac{1}{2}z \right) (2u_\beta^2 - u_\beta + z) \\ &\quad - (\beta-1/2) \left( -w_\beta - \frac{\beta-1/2}{2u_\beta^2 - u_\beta + z} \right) \\ &= \frac{1}{2}u_\beta^2 - \left( w_\beta^2 + \frac{1}{2}z \right) u_\beta - \left( \beta + \frac{1}{2} \right) w_\beta + w_\beta \\ &= H(\beta, w_\beta, u_\beta) + w_\beta \\ &= h(\beta) + w_\beta. \end{aligned}$$

Ou de manière équivalente,

$$(2.27) \quad w_\beta = h(\beta-1) - h(\beta).$$

Par cette relation et le système (2.17), nous avons les relations suivantes

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \frac{u'_\beta}{u_\beta} &= 2w_\beta + \frac{\beta+1/2}{u_\beta} \\ &= w_\beta - \left( -w_\beta + \frac{\beta+1/2}{u_\beta} \right) \\ &= w_\beta - w_{\beta+1} \\ &= h(\beta-1) - 2h(\beta) + h(\beta+1). \end{aligned}$$

A partir de  $h$ , nous allons introduire une nouvelle fonction  $\tau(\beta)$  telle que

$$(2.29) \quad \frac{d}{dz} \log(\tau(\beta)) = h(\beta).$$

Dès lors, par les deux équations précédentes, nous avons que

$$(2.30) \quad -2 \frac{d^2}{dz^2} \log(\tau(\beta)) = c \frac{\tau(\beta-1)\tau(\beta+1)}{\tau(\beta)^2}$$

où  $c$  est une constante.

Nous avons maintenant un nombre important de relations et de fonctions. Nous allons les évaluer en une valeur de  $\beta$ . C'est notre troisième étape. Nous pouvons choisir la valeur la plus simple qui est  $\beta = \gamma = 0$ . Cela nous mène à un cas très particulier de (2.16), le cas où  $\alpha = 0$ . Dès lors, le système (2.17) possède une solution rationnelle simple :  $(w_0, u_0) = (0, z/2)$ . Donc, nous avons

$$(2.31) \quad h(0) = -\frac{1}{8}z^2,$$

$$(2.32) \quad \tau(0) = C_0 \exp^{-\frac{1}{24}z^3}.$$

En appliquant une première fois la relation de récurrence, nous obtenons aussi

$$(2.33) \quad \tau(-1) = C_{-1} \exp^{-\frac{1}{24}z^3},$$

avec  $C_0$  et  $C_{-1}$  des constantes.

Nous pouvons encore appliquer (2.24) un nombre entier  $n+1$  de fois et trouver la valeur de  $\tau$  associée. Cela nous permet de définir la fonction  $P_n(z)$  par la relation :

$$(2.34) \quad \tau(-n-1) = C_{-n-1} P_n(z) \exp^{-\frac{1}{24}z^3}.$$

La quatrième étape est de montrer que la suite de fonctions  $P_n(z)$  correspond aux polynômes YV définis dans la première section du chapitre et de les utiliser pour définir des solutions rationnelles. Pour cela, remarquons que  $P_{-1}(z) = P_0(z) = 1$ . De plus, en associant les équations (2.30) et (2.34), nous obtenons

$$(2.35) \quad -\frac{2}{c} \left( -\frac{z}{4} + \frac{P_n'' P_n - P_n'^2}{P_n^2} \right) = \frac{C_{-n} C_{-n-2} P_{n-1} P_{n+1}}{C_{-n-1}^2 P_n^2}.$$

Nous pouvons maintenant décider de la valeur des constantes  $C_m$  et  $c$ . En posant,  $C_m = 1$  pour tout  $m$  et  $c = 1/2$ , nous avons

$$(2.36) \quad P_{n+1} = \frac{z P_n^2 - 4(P_n P_n'' - P_n'^2)}{P_{n-1}},$$

ce qui est la relation (2.2) des polynômes YV.

En reprenant la relation (2.26), nous obtenons

$$(2.37) \quad w_{-n-1} = h(-n-2) - h(-n-1) = \frac{d}{dz} \log \frac{P_{n+1}}{P_n},$$

une solution pour l'équation  $P_{II}$  avec  $\alpha = -n - 1$ .

Pour résumer et terminer cette section, énonçons le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.4.** *Soit  $P_n(z)$  la suite des polynômes de Yablonsky-Vorob'ev. Alors, la fonction*

$$(2.38) \quad w(z) = \frac{d}{dz} \log \frac{P_{n-1}}{P_n}$$

*est une solution de  $P_{II}$  pour  $\alpha = n$ .*

#### 4. Solutions rationnelles sous forme de déterminants

Dans cette section, nous allons énoncer deux théorèmes équivalents au théorème 2.4 (respectivement [10] et [5]). Tous deux expriment des solutions à la seconde équation de Painlevé à l'aide de déterminants.

Le premier théorème se base sur des polynômes construits par récurrence. Pour cela, posons  $a_0 = z$  et la relation suivante

$$(2.39) \quad a_{n+1} = \frac{d}{dz} a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j a_{n-j-1}.$$

Nous pouvons alors exprimer les premiers éléments de la série :

$$(2.40) \quad a_1(z) = 1, \quad a_2(z) = z^2, \quad a_3(z) = 4z, \quad a_4(z) = 2z^3 + 5, \dots$$

Grâce à cela, nous pouvons définir le déterminant suivant :

$$(2.41) \quad \tau_n(z) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Dès lors, nous avons un théorème à l'énoncé très proche de (2.4) :

**THÉORÈME 2.5.** *Soit  $\tau_n(z)$  la suite de déterminants précités. Alors, la fonction*

$$(2.42) \quad w(z) = \frac{d}{dz} \log \frac{\tau_n(z)}{\tau_{n-1}(z)}$$

*est une solution de  $P_{II}$  pour  $\alpha = n$ .*

Le second théorème est aussi très similaire. La différence se situe dans la définition des polynômes constituant le déterminant. Donc, si nous définissons la suite  $p_n(z)$  par

$$(2.43) \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j(z) \lambda^j = \exp\left(z\lambda - \frac{4}{3}\lambda^3\right)$$

et  $p_j(z) = 0$  pour  $j < 0$ , nous avons le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.6.** *Soit  $\tau_n(z)$  la suite de déterminants définis comme*

$$(2.44) \quad \tau_n(z) = \begin{vmatrix} p_n & p_{n+1} & \cdots & p_{2n-1} \\ p_{n-2} & p_{n-1} & \cdots & p_{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{-n+2} & p_{-n+3} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Alors, la fonction

$$(2.45) \quad w(z) = \frac{d}{dz} \log \frac{\tau_{n-1}(z)}{\tau_n(z)}$$

est une solution de  $P_{\text{II}}$  pour  $\alpha = n$ .

A la fin de cette section, nous avons à notre disposition trois théorèmes permettant de calculer des solutions de  $P_{\text{II}}$  dans le cas où la constante  $\alpha$  est un entier. Nous allons maintenant essayer de faciliter encore plus cette construction de solutions.

## 5. Transformations de Bäcklund

Pour cela, dans cette section, nous allons parler de transformations de solutions. C'est un concept que nous avons déjà abordé dans la section sur les solutions rationnelles. Ces transformations partent d'une solution  $w$  de  $P_{\text{II}}$  pour un paramètre  $\alpha$  et donnent une solution de  $P_{\text{II}}$  pour un autre paramètre, par exemple  $\alpha + 1$ . Cette nouvelle solution est exprimée en fonction de  $w$  et de sa dérivée. Dans cette section,  $w$  exprimera toujours une solution de  $w'' = 2w^3 + zw + \alpha$ .

Les définitions des transformations sont tirées de [13] mais les calculs sont de l'auteur.

La première de ces transformations renvoie une solution pour  $-\alpha$ . Elle est la suivante :

$$(2.46) \quad w(z) \mapsto -w(z).$$

En effet, nous avons que

$$(2.47) \quad (-w)'' = -(w'') = -2w^3 - zw - \alpha = 2(-w)^3 + z(-w) - \alpha.$$

Ce qui prouve ce que nous voulons.

Les trois transformations suivantes sont celles déjà introduites plus haut. En reprenant les notations alors introduites, nous avons la deuxième transformation  $I^\alpha : S(\alpha) \rightarrow S(-\alpha - 1)$  :

$$(2.48) \quad I^\alpha(w, u) = \begin{cases} \left( w + \frac{\alpha + 1/2}{u}, u \right), & \text{si } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ (w, u), & \text{si } \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

où  $u = w' + w^2 + \frac{1}{2}z$ .

Dans cette notation, nous nous intéressons à la première composante car elle correspond à la solution de  $P_{II}$ . Pour vérifier que  $w + \frac{\alpha + 1/2}{u}$  est bien une solution pour  $-\alpha - 1$ , nous allons utiliser le système hamiltonien (2.17). Dès lors, si  $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ , nous avons

$$(2.49) \quad \begin{aligned} \left( w + \frac{\alpha + 1/2}{u} \right)' &= w' - \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{u'}{u^2} \\ &= u - w^2 - \frac{z}{2} - \frac{\alpha}{u^2} \left( 2wu + \alpha + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2u^2} \left( 2wu + \alpha + \frac{1}{2} \right) \\ &= u - \frac{z}{2} - \left( w^2 + \frac{2\alpha w}{u} + \frac{\alpha^2}{u^2} + \frac{\alpha}{2u^2} + \frac{w}{u} + \frac{\alpha}{2u^2} + \frac{1}{4u^2} \right) \\ &= u - \frac{z}{2} - \left( w + \frac{\alpha + 1/2}{u} \right)^2 \end{aligned}$$

et aussi

$$(2.50) \quad u' = 2wu + \alpha + \frac{1}{2} = 2u \left( w + \frac{\alpha + 1/2}{u} \right) - \alpha - \frac{1}{2} = 2u \left( w + \frac{\alpha + 1/2}{u} \right) + (-\alpha - 1) + \frac{1}{2}.$$

Donc la transformée est bien une solution du système et  $w + \frac{\alpha + 1/2}{u}$  une solution de  $P_{II}$ .

La troisième transformation  $T_-^\alpha : S(\alpha) \rightarrow S(\alpha - 1)$  est donnée par

$$(2.51) \quad T_-^\alpha(w, u) = \begin{cases} \left( -w - \frac{\alpha - 1/2}{2w^2 - u + z}, 2w^2 - u + z \right), & \text{si } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ (-w, 2w^2 - u + z), & \text{si } \alpha = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pour la vérification, nous allons procéder de la même manière que précédemment. Mais ici, nous allons diviser le calcul pour le rendre plus lisible.

Première étape, nous devons calculer la dérivé :

$$\begin{aligned}
(2.52) \quad \frac{d}{dz} \left( -w - \frac{\alpha - 1/2}{2w^2 - u + z} \right) &= -w' + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{4ww' - u' + 1}{(2w^2 - u + z)^2} \\
&= -u + w^2 + \frac{z}{2} + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{4ww' - u' + 1}{(2w^2 - u + z)^2} \\
&= -u + w^2 + \frac{z}{2} + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{2wu - 4w^3 - 2wz - (\alpha - 1/2)}{(2w^2 - u + z)^2}.
\end{aligned}$$

Deuxième étape, le calcul du carré :

$$\begin{aligned}
(2.53) \quad \left( -w - \frac{\alpha - 1/2}{2w^2 - u + z} \right)^2 &= w^2 + 2w \left( \frac{\alpha - 1/2}{2w^2 - u + z} \right) + \left( \frac{\alpha - 1/2}{2w^2 - u + z} \right)^2 \\
&= w^2 + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{2wu - 4w^3 - 2wz - (\alpha - 1/2)}{(2w^2 - u + z)^2}.
\end{aligned}$$

Troisième étape :

$$\begin{aligned}
(2.54) \quad (2w^2 - u + z) - \left( -w - \frac{\alpha - 1/2}{2w^2 - u + z} \right)^2 - \frac{z}{2} &= 2w^2 - w^2 - u + z - \frac{z}{2} + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{2wu - 4w^3 - 2wz - (\alpha - 1/2)}{(2w^2 - u + z)^2} \\
&= -u + w^2 + \frac{z}{2} + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{2wu - 4w^3 - 2wz - (\alpha - 1/2)}{(2w^2 - u + z)^2} \\
&= \frac{d}{dz} \left( -w - \frac{\alpha - 1/2}{2w^2 - u + z} \right).
\end{aligned}$$

Donc, la première composante de la transformation respecte la première équation de (2.17). Pour constater que c'est aussi le cas de la seconde, il suffit de faire un calcul similaire qui est laissé au lecteur.

La dernière transformation étudiée dans cette section est  $T_+^\alpha : S(\alpha) \rightarrow S(\alpha + 1)$  :

$$(2.55) \quad T_+^\alpha(w, u) = \begin{cases} \left( -w - \frac{\alpha + 1/2}{u}, 2 \left( w + \frac{\alpha + 1/2}{u} \right)^2 - u + z \right), & \text{si } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ (-w, 2w^2 - u + z), & \text{si } \alpha = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pour vérifier que  $-w - \frac{\alpha + 1/2}{u}$  est une solution pour  $\alpha + 1$ , nous devons remarquer que son opposé est une solution pour  $-\alpha - 1$  par la deuxième transformation. En utilisant la première, nous avons ce que nous voulons.

Pour résumer ce chapitre, nous devons faire ressortir deux points. Le premier est constitué des trois théorèmes nous donnant des solutions pour  $P_{II}$  avec  $\alpha$  entier. Le deuxième consiste en l'existence de transformations de solutions nous permettant de passer d'une constante à une autre.

Dans le chapitre suivant, nous allons élargir cette logique à des cas où la constante  $\alpha$  n'est pas un nombre entier.

## Solutions non rationnelles de $P_{II}$ et applications

### 1. Solutions non rationnelles de $P_{II}$

Comme mentionné à la fin du chapitre précédent, la première section de ce chapitre sera consacrée au cas où la constante  $\alpha$  n'est pas entière. Dans les deux sections suivantes, nous allons travailler sur des applications des solutions que nous avons construites depuis le début de ce mémoire.

Dans cette section, nous allons plus précisément étudier les solutions de  $P_{II}$  dans le cas où la constante  $\alpha \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ . Comme pour  $\alpha$  entier, certaines solutions peuvent être construites à l'aide de déterminants. Par contre, les éléments de la matrice ne sont plus des polynômes mais des combinaisons linéaires des fonctions  $A_i$ ,  $B_i$  et de leur première dérivée. Nous verrons que ce constat complique considérablement l'étude asymptotique de ces solutions. Les idées de cette section sont tirées de [5], les calculs sont de l'auteur.

Tout d'abord, nous devons réécrire l'équation  $P_{II}$ . Pour cela remarquons les deux égalités suivantes :

$$(3.1) \quad \varepsilon \left( \varepsilon w' + w^2 + \frac{1}{2}z \right)' = \varepsilon \varepsilon w'' + 2\varepsilon w w' + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$(3.2) \quad 2w \left( \varepsilon w' + w^2 + \frac{1}{2}z \right) + \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon = 2\varepsilon w w' + 2w^3 + zw + \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Prenons maintenant  $\varepsilon$  tel que  $\varepsilon^2 = 1$ . Dès lors,

$$(3.1) = (3.2) \Leftrightarrow w'' + 2\varepsilon w w' + \frac{1}{2}\varepsilon = 2\varepsilon w w' + 2w^3 + zw + \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$(3.3) \quad \Leftrightarrow w'' = 2w^3 + zw + \alpha$$

$$\Leftrightarrow P_{II}.$$

Posons  $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon$ . Alors, l'équivalence nous permet de dire que les solutions de  $P_{II}$  s'obtiennent en utilisant l'équation suivante :

$$(3.4) \quad \varepsilon w' + w^2 + \frac{1}{2}z = 0.$$

Nous devons faire attention que (3.4) et  $P_{II}$  ne sont pas équivalentes. Nous nous contentons d'utiliser (3.4) pour trouver les solutions de  $P_{II}$ .

Retravillons cette nouvelle équation en posant

$$(3.5) \quad w = \varepsilon \frac{\phi'}{\phi}$$

pour une fonction non nul  $\phi$  dérivable. Dès lors, nous avons

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \varepsilon w' + w^2 + \frac{1}{2}z = 0 &\Leftrightarrow \varepsilon^2 \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)' + \varepsilon^2 \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2}z = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi'' \phi + \frac{1}{2}z \phi^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi'' + \frac{1}{2}z \phi = 0. \end{aligned}$$

Remarquons que cette dernière équation a une forme particulière. Elle est similaire à l'équation d'Airy

$$(3.7) \quad u''(z) = zu(z).$$

Cette équation possède une solution particulière appelée la fonction d'Airy dont la définition est la suivante :

**DÉFINITION 3.1. [3]** Soit  $\gamma$  un chemin de  $\exp^{-i\pi/3}\infty$  à  $\exp^{i\pi/3}\infty$ . Alors la fonction d'Airy est

$$(3.8) \quad \text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp \frac{y^3}{3} - zy \, dy.$$

Cette fonction a été introduite en 1833 par George Biddell Airy, un physicien britannique, dans des travaux sur l'optique.

Par la méthode de "steepest descent" déjà mentionnée plus haut et par un changement de variable, nous obtenons alors le comportement asymptotique suivant :

$$(3.9) \quad \text{Ai}(z) \sim \frac{1}{2z^{1/4} \sqrt{\pi}} \exp^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}, \quad z \rightarrow +\infty.$$

De manière similaire, la fonction Bi est donnée par

$$(3.10) \quad \text{Bi}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \exp \frac{y^3}{3} - zy \, dy,$$

où  $\Sigma$  est l'union de la courbe allant de  $\exp^{2\pi i/3}\infty$  à  $+\infty$  et de sa conjuguée.

Dès lors, la solution de (3.6) est donnée par

$$(3.11) \quad \phi(z) = C_1 \text{Ai}(\zeta) + C_2 \text{Bi}(\zeta), \quad \zeta = -2^{-1/3}z,$$

avec  $C_1, C_2$  des constantes.

Dès lors, nous avons le théorème suivant

THÉOREME 3.2. *Soit  $\phi$  la fonction construite plus haut et  $\tau_n(z)$  le déterminant*

$$(3.12) \quad \tau_n(z) = \begin{vmatrix} \phi(z) & \phi'(z) & \cdots & \phi^{(n-1)}(z) \\ \phi'(z) & \phi''(z) & \cdots & \phi^{(n)}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{(n-1)}(z) & \phi^{(n)}(z) & \cdots & \phi^{(2n-2)}(z) \end{vmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Alors la fonction

$$(3.13) \quad w(z) = \frac{d}{dz} \log \left( \frac{\tau_{n-1}(z)}{\tau_n(z)} \right)$$

est une solution de  $P_{II}$  pour  $\alpha = n - \frac{1}{2}$ .

Nous pouvons facilement construire la solution pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

$$(3.14) \quad w(z) = \frac{d}{dz} \log \left( \frac{\tau_0(z)}{\tau_1(z)} \right) = \frac{d}{dz} \log \left( \frac{1}{\phi} \right) = \phi \frac{-1}{\phi^2} \phi' = \frac{\phi'}{\phi}$$

L'application des transformations de Bäcklund nous permet d'obtenir une solution pour chaque  $\alpha \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ .

Cette section marque la fin de notre travail de construction de solutions. Dans les deux sections restantes, nous allons nous intéresser à certaines applications de ces solutions.

## 2. Lien entre $P_{II}$ et l'équation de Kortweg-de Vries modifiée

Dans cette section, nous allons explorer le lien existant entre la seconde équation de Painlevé et une variante de l'équation de Korteweg-de Vries, mKdV. Pour rappel, mKdV est une équation aux dérivées partielles du troisième ordre :

$$(3.15) \quad v_t(x, t) - 6v(x, t)^2 v_x(x, t) + v_{xxx}(x, t) = 0.$$

Comme son nom l'indique, elle est tirée de l'équation de Korteweg-de Vries. Cette dernière est apparue pour la première fois dans des travaux en 1834. Mais les principaux résultats sont ceux de Korteweg et de de Vries en 1895. Elle est principalement utilisée en physique pour modéliser les vagues en faible profondeur.

Mais revenons à l'équation mKdV et imposons le changement de variable suivant

$$(3.16) \quad \begin{aligned} z &= x(3t)^{-1/3}, \\ v(x, t) &= (3t)^{-1/3} w(z). \end{aligned}$$

Dès lors, nous avons que

$$(3.17) \quad \begin{aligned} v_t(x, t) &= -(3t)^{-4/3}(w(z) + zw'(z)), \\ v_x(x, t) &= (3t)^{-2/3}w'(z), \\ v_{xxx}(x, t) &= (3t)^{-4/3}w^{(3)}(z). \end{aligned}$$

En remplaçant ces résultats dans (3.15), nous obtenons que

$$(3.18) \quad \begin{aligned} &-(3t)^{-4/3}[w(z) + zw'(z) + 6w'(z)w(z)^2 - w^{(3)}(z)] = 0 \\ \Leftrightarrow &w(z) + zw'(z) + 6w'(z)w(z)^2 - w^{(3)}(z) = 0 \\ \Leftrightarrow &w^{(3)}(z) = (zw(z))' + \left(\frac{6}{3}w(z)^3\right)' \\ \Leftrightarrow &w''(z) = zw(z) + 2w(z)^3 + \alpha \end{aligned}$$

pour  $\alpha$  la constante d'intégration. Nous retrouvons donc  $P_{II}$  à partir de mKdV.

### 3. La distribution de Tracy-Widom

Dans cette dernière section, nous allons utiliser les résultats énoncés dans les chapitres précédents dans une seconde application de l'équation de Painlevé II. C'est la définition de la distribution de Tracy-Widom et certaines de ses propriétés. L'essentiel de cette section est le théorème liant cette distribution à l'opérateur intégral d'Airy. Nous verrons que dans la démonstration de ce théorème, nous réutiliserons plusieurs arguments déjà évoqués dans le premier chapitre.

Mais avant cela, intéressons-nous à un problème relevant des mathématiques combinatoires ([5]). Soit  $S_n$  le groupe des permutations  $\pi$  de  $n$  éléments. Dénotons  $l_n(\pi)$  la longueur de la plus grande sous-suite croissante d'une permutation  $\pi$ . Notre objectif est de comprendre le comportement asymptotique de

$$(3.19) \quad p_n(s) = \text{Prob}(l_n(\pi) \leq s).$$

Pour cela, il existe un théorème qui nous dit que

$$(3.20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}\left(\frac{l_n(\pi) - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \leq s\right) = F_2(s)$$

avec  $F_2(s)$  la distribution de Tracy-Widom définie, grâce à  $w$  solution de  $P_{II}$  pour  $\alpha = 0$ , par

$$(3.21) \quad F_2(s) = \exp\left\{-\int_x^\infty (y-x)w(y)^2 dy\right\}.$$

Dès lors, nous devons comprendre le comportement du terme de droite. Pour cela, nous allons démontrer un théorème l'explicitant. Mais cela nécessite du

travail préliminaire. La suite de cette section est basée sur [1].

Pour commencer, nous devons introduire rapidement les opérateurs intégrables.

Pour cela, prenons un contour  $\Gamma$  dans le  $\lambda$ -plan complexe et un opérateur intégral  $K$  dans  $L^2(\Gamma, d\lambda)$ ,

$$(3.22) \quad K(\phi)(\lambda) = \int_{\Gamma} K(\lambda, \mu) \phi(\mu) d\mu.$$

L'opérateur  $K$  sera dit intégrable si son noyau admet la représentation suivante :

$$(3.23) \quad K(\lambda, \mu) = \frac{f^T(\lambda)h(\mu)}{\lambda - \mu}$$

pour  $f(\lambda), h(\lambda)$  deux vecteurs de fonctions lisses et de même dimension.

Nous allons aussi supposer que le produit scalaire entre ces deux vecteurs est nul :

$$(3.24) \quad f^T(\lambda)h(\lambda) = 0.$$

Comme un opérateur intégrable est un opérateur sur un espace de Hilbert, nous pouvons définir le déterminant de Fredholm suivant

$$(3.25) \quad \det(1 + K) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Tr} \Lambda^k(K)$$

où  $\Lambda$  est l'opérateur du produit extérieur qui, dans ce contexte, est tel que

$$(3.26) \quad \text{Tr} \Lambda^k(K) = \frac{1}{k!} \int \dots \int \det K(x_i, x_j) |_{1 \leq i, j \leq k} dx_1 \dots dx_k.$$

Remarquons aussi que, si  $K$  est un opérateur admettant une trace, l'équation suivante est vraie :

$$(3.27) \quad \log(\det(1 + zK)) = \text{Tr}(\log(1 + zK)).$$

Comme nous pourrons le remarquer dans la démonstration qui suit, cette relation est l'unique propriété de la théorie des opérateurs dont nous aurons besoin.

Et voici le théorème principal de la section.

**THÉORÈME 3.3.** *Soit  $w(x)$  l'unique solution de la seconde équation de Painlevé pour le comportement asymptotique suivant :*

$$(3.28) \quad w(x) = w(x, a) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-\frac{3}{2}x^{3/2}} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

*Soit  $K_x$  l'opérateur intégral d'Airy et son noyau :*

$$(3.29) \quad K_x(\lambda, \mu) = \frac{\text{Ai}(\lambda + x)\text{Ai}'(\mu + x) - \text{Ai}'(\lambda + x)\text{Ai}(\mu + x)}{\lambda - \mu}.$$

Alors, nous avons la formule suivante

$$(3.30) \quad \det(1 - K_x) = \exp \left\{ - \int_x^\infty (y - x)w(y)^2 dy \right\}.$$

DÉMONSTRATION. Si nous posons, pour  $x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,

$$(3.31) \quad f^T(\lambda) = (\text{Ai}(\lambda + x), \text{Ai}'(\lambda + x)), \quad h^T(\mu) = (\text{Ai}'(\mu + x), \text{Ai}(\mu + x)),$$

alors

$$(3.32) \quad \frac{f^T(\lambda)h(\mu)}{\lambda - \mu} = K_x(\lambda, \mu).$$

Donc  $K_x$  est un opérateur intégrable. Posons, pour  $j = 1, 2$ ,

$$(3.33) \quad F_j(\lambda) = [(1 - K)^{-1}f_j](\lambda), \quad H_j(\lambda) = [(1 - K^T)^{-1}h_j](\lambda).$$

Ces fonctions sont alors déterminées par l'unique solution du problème de Riemann-Hilbert suivant :

- $Y(\lambda)$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ .
- La fonction  $Y$  possède des valeurs limites continues en  $[0, +\infty[$  et telles que  $Y_+(\lambda) = Y_-(\lambda)G(\lambda)$  avec

$$(3.34) \quad G(\lambda) = \text{Id}_2 - 2\pi i f(\lambda) h^T(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - 2\pi i \text{Ai}(\lambda + x) \text{Ai}'(\lambda + x) & -\text{Ai}(\lambda + x)^2 \\ \text{Ai}'(\lambda + x)^2 & 1 + 2\pi i \text{Ai}(\lambda + x) \text{Ai}'(\lambda + x) \end{pmatrix}$$

- $Y(\lambda) = O(\log(\lambda)), \quad \lambda \rightarrow 0.$
- $Y(\lambda) = \text{Id}_2 + O(\frac{1}{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$

En effet, nous avons alors

$$(3.35) \quad F(\lambda) = Y(\lambda)f(\lambda), \quad H(\lambda) = Y^T(\lambda)^{-1}h(\lambda).$$

Remarquons que la matrice de saut  $G$  peut s'écrire sous la forme du produit suivant

$$(3.36) \quad G(\lambda) = \phi(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \phi^{-1}(\lambda)$$

avec

$$(3.37) \quad \phi(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & g_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) & g_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

La première colonne de cette nouvelle matrice est connue. Mais nous devons imposer une condition sur la deuxième afin qu'elle vérifie (3.36) :

$$(3.38) \quad G(\lambda) = \phi(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \phi^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} -2\pi i f_1(\lambda) f_2(\lambda) + \det \phi(\lambda) & 2\pi i f_1(\lambda)^2 \\ -2\pi i f_2(\lambda)^2 & 2\pi i f_1(\lambda) f_2(\lambda) + \det \phi(\lambda) \end{pmatrix} \frac{1}{\det \phi(\lambda)}.$$

Dès lors, nous devons imposer aux fonctions  $g_1$  et  $g_2$  qu'elles respectent la condition

$$(3.39) \quad \det \phi(\lambda) \equiv 1.$$

Comme dans les démonstrations du chapitre 2, nous allons maintenant transformer le problème de Riemann-Hilbert en introduisant une nouvelle fonction :

$$(3.40) \quad \psi(\lambda) = Y(\lambda)\phi(\lambda).$$

Alors le problème de Riemann-Hilbert devient

- $\psi(\lambda)$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ ,
- $\psi(\lambda)$  a des valeurs limites continues respectant une relation de saut pour  $\lambda \in [0, +\infty[$  :

$$(3.41) \quad \psi_+(\lambda) = \psi_-(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $\psi(\lambda)$  doit satisfaire les deux comportements asymptotiques suivants :

$$(3.42) \quad \psi(\lambda) = \hat{\psi}(\lambda) \left( \text{Id}_2 - \log(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \lambda \rightarrow 0,$$

avec  $\hat{\psi}$  analytique en  $\lambda = 0$  et

$$(3.43) \quad \psi(\lambda) = \left( \text{Id}_2 + \frac{\mathbf{m}_1}{\lambda} + \frac{\mathbf{m}_2}{\lambda^2} + \dots \right) \phi(\lambda), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Comme le problème possède une matrice de saut constante, nous pouvons appliquer les mêmes arguments que dans le chapitre 2 et obtenir alors le système suivant :

$$(3.44) \quad \begin{cases} \psi_\lambda = A(\lambda)\psi \\ \psi_x = U(\lambda)\psi. \end{cases}$$

Notre prochain objectif est donc de découvrir les valeurs des coefficients de  $A(\lambda)$  et  $U(\lambda)$ . Pour cela, nous allons passer par deux étapes préliminaires. La première est de poser

$$(3.45) \quad g_1(\lambda) = 2\pi \exp^{-\pi i/6} \text{Ai} \left( \exp^{-2\pi i/3}(\lambda + x) \right),$$

$$(3.46) \quad g_2(\lambda) = g_1'(\lambda) = 2\pi \exp^{-5\pi i/6} \text{Ai}' \left( \exp^{-2\pi i/3}(\lambda + x) \right).$$

Nous devons vérifier que ces deux fonctions respectent bien la condition  $\det \phi(\lambda) \equiv$

1 :

(3.47)

$$\begin{aligned} \det \phi(\lambda) &= f_1(\lambda)g_2(\lambda) - f_2(\lambda)g_1(\lambda) \\ &= 2\pi \exp^{-\pi i/6} \text{Ai}'\left(\exp^{-2\pi i/3}(\lambda+x)\right) \exp^{-2\pi i/3} \text{Ai}(\lambda+x) - 2\pi \exp^{-\pi i/6} \text{Ai}\left(\exp^{-2\pi i/3}(\lambda+x)\right) \text{Ai}'(\lambda+x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

La deuxième étape est de montrer que

$$(3.48) \quad \phi_\lambda \phi^{-1} = \phi_x \phi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda+x & 0 \end{pmatrix}.$$

La première égalité est triviale si nous remarquons la symétrie de toutes les fonctions entre  $x$  et  $\lambda$ . La deuxième peut se calculer.

$$(3.49) \quad \phi_\lambda \phi^{-1} = \begin{pmatrix} f_{1_\lambda} g_2 - g_{1_\lambda} f_2 & -f_{1_\lambda} g_1 + g_{1_\lambda} f_1 \\ f_{2_\lambda} g_2 - g_{2_\lambda} f_2 & -f_{2_\lambda} g_1 + g_{2_\lambda} f_1 \end{pmatrix}.$$

Or, nous avons les relations suivantes :

$$(3.50) \quad f_2 = f_{1_\lambda} \quad g_2 = g_{1_\lambda}.$$

Dès lors, les termes de la matrices deviennent :

$$(3.51) \quad \begin{aligned} -f_{1_\lambda} g_1 + g_{1_\lambda} f_1 &= g_2 f_1 - f_2 g_1 = \det \phi = 1, \\ f_{1_\lambda} g_2 - g_{1_\lambda} f_2 &= f_{1_\lambda} g_2 - f_{1_\lambda} g_2 = 0, \\ -f_{2_\lambda} g_1 + g_{2_\lambda} f_1 &= -f_{2_\lambda} g_1 + f_{2_\lambda} g_1 = 0. \end{aligned}$$

Pour le dernier terme, nous avons

$$(3.52) \quad \begin{aligned} f_{2_\lambda} g_2 - g_{2_\lambda} f_2 &= 2\pi \exp^{-5\pi i/6} \text{Ai}'\left(\exp^{-2\pi i/3}(\lambda+x)\right) \text{Ai}''(\lambda+x) - 2\pi \exp^{-9\pi i/6} \text{Ai}\left(\exp^{-2\pi i/3}(\lambda+x)\right) \text{Ai}'(\lambda+x) \\ &= (\lambda+x) 2\pi \exp^{-\pi i/6} \left( \exp^{-2\pi i/6} \text{Ai}'\left(\exp^{-2\pi i/3}(\lambda+x)\right) \text{Ai}(\lambda+x) - \exp^{-2\pi i/6} \text{Ai}\left(\exp^{-2\pi i/3}(\lambda+x)\right) \text{Ai}'(\lambda+x) \right) \\ &= (\lambda+x)(g_2 f_1 - f_2 g_1) = (\lambda+x). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant revenir à notre objectif de départ : trouver les valeurs de  $A(\lambda)$  et  $U(\lambda)$ . Au vu du comportement asymptotique de  $\psi$  en  $\lambda = 0$  et  $\lambda = +\infty$ , nous savons que ces matrices ont la forme suivante :

$$(3.53) \quad A(\lambda) = \lambda A_1 + A_0 + \frac{1}{\lambda} A_{-1}, \quad U(\lambda) = \lambda U_1 + U_0.$$

Dès lors, nous devons chercher séparément les cinq matrices. Comme déjà indiqué, la fonction  $\psi$  est symétrique en  $x$  et  $\lambda$ . Donc, nous avons

$$(3.54) \quad A_1 = U_1, \quad A_0 = U_0.$$

Il suffit donc de trouver les trois matrices de  $A$ . Pour  $A_{-1}$ , nous allons utiliser le comportement asymptotique de  $\psi$  en  $\lambda = 0$  :

$$(3.55) \quad \begin{aligned} A_{-1} &= -\hat{\psi}(0)\mathbf{E}_{12}(\mathbf{Id}_2 - \log(\lambda)\mathbf{E}_{12})^{-1}\hat{\psi}^{-1}(0) \\ &\sim -\hat{\psi}(0)\mathbf{E}_{12}\hat{\psi}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}(0)_{11}\hat{\psi}(0)_{21} & -\hat{\psi}(0)_{11}^2 \\ \hat{\psi}(0)_{21}^2 & -\hat{\psi}(0)_{21}\hat{\psi}(0)_{11} \end{pmatrix}, \quad \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En posant  $\hat{\psi}(0)_{11} = w$  et  $\hat{\psi}(0)_{21} = v$ , nous avons

$$(3.56) \quad A_{-1} = \begin{pmatrix} wv & -w^2 \\ v^2 & -wv \end{pmatrix}.$$

Pour  $A_1$  et  $A_0$ , nous pouvons reprendre les mêmes idées mais avec le comportement asymptotique en  $\lambda = +\infty$ .

$$(3.57) \quad \begin{aligned} A(\lambda) &= \left( \mathbf{Id}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{m}_k}{\lambda^k} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda + x & 0 \end{pmatrix} \left( \mathbf{Id}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{m}_k}{\lambda^k} \right)^{-1} \\ &\quad + \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-k\mathbf{m}_k}{\lambda^{k+1}} \right) \left( \mathbf{Id}_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{m}_k}{\lambda^k} \right)^{-1}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

où le deuxième terme résulte de la première étape préliminaire. Donc

$$(3.58) \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} + [m_1, \mathbf{E}_{21}] = \begin{pmatrix} m_{112} & 1 \\ x + m_{122} - m_{111} & -m_{112} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ p & -u \end{pmatrix}$$

et

$$(3.59) \quad A_1 = \mathbf{E}_{21} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda + x & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Afin de continuer à suivre le raisonnement du chapitre 2, nous pouvons reprendre l'équation (1.27) et chercher ce à quoi elle équivaut :

$$(3.60) \quad U_\lambda = U_1, \quad A_x = A_{0_x} + \frac{1}{\lambda} A_{-1_x} = \begin{pmatrix} u_x & 0 \\ p_x & -u_x \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} w_x v + w v_x & -2w w_x \\ 2v v_x & -w_x v - w v_x \end{pmatrix},$$

$$(3.61) \quad \begin{aligned} [A, U] &= \lambda[A_1, U_0] + \lambda[U_0, A_1] + [A_{-1}, U_1] + \frac{1}{\lambda}[A_{-1}, U_0] \\ &= [A_{-1}, U_1] + \frac{1}{\lambda}[A_{-1}, U_0] = \begin{pmatrix} -w^2 & 0 \\ -2wv & w^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -w^2 p - v^2 & 2wv + 2w^2 u \\ 2v^2 u - 2v w p & v^2 + w^2 p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dès lors, nous avons le système suivant

$$(3.62) \quad \begin{cases} u_x = w^2 \\ p_x = 2vw + 1 \\ 2vv_x = 2wvp - 2v^2u \\ 2ww_x = 2wv + 2w^2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = w^2 \\ p_x = 2vw + 1 \\ v_x = wp - vu \\ w_x = v + wu. \end{cases}$$

Ce système vérifie l'équation suivante

$$(3.63) \quad u^2 + p - w^2 - x = c$$

avec  $c \in \mathbb{R}$  une constante. En effet,

(3.64)

$$(u^2 + p - w^2 - x)' = 2uu_x + p_x - 2ww_x - 1 = 2uw^2 + 1 + 2vw - 2wv - 2w^2u - 1 = 0.$$

Dès lors,

$$(3.65) \quad \begin{aligned} w_{xx} &= w_xu + wu_x + v_x \\ &= wu^2 + vu + w^3 + wp - uv \\ &= w(u^2 + p) + w^3 \\ &= w(w^2 + x + c) + w^3 = 2w^3 + w(x + c). \end{aligned}$$

L'équation  $w_{xx} = 2w^3 + w(x + c)$  est équivalente à la seconde équation de Painlevé à une translation de l'argument  $x$  près. Nous avons donc relié notre problème de Riemann-Hilbert initial à  $P_{II}$ . Nous devons maintenant le relier au déterminant de Airy. Pour cela, commençons par remarquer qu'une solution du problème de Riemann-Hilbert est donnée par

$$(3.66) \quad Y(\lambda) = \text{Id}_2 - \int_0^{+\infty} F(\mu) h^T(\mu) \frac{d\mu}{\mu - \lambda}$$

avec, comme défini plus haut

$$(3.67) \quad F_j(\mu) = [(1 - K)^{-1} f_j](\mu).$$

De plus, nous avons que

(3.68)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} K_x(\lambda, \mu) &= \frac{1}{\lambda - \mu} (\text{Ai}'(\lambda + x)\text{Ai}'(\mu + x) + \text{Ai}(\lambda + x)\text{Ai}''(\mu + x) - \text{Ai}'(\lambda + x)\text{Ai}'(\mu + x) - \text{Ai}''(\lambda + x)\text{Ai}(\mu + x)) \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu} ((\mu + x)\text{Ai}(\lambda + x)\text{Ai}(\mu + x) - (\lambda + x)\text{Ai}(\lambda + x)\text{Ai}(\mu + x)) \\ &= \frac{\mu - \lambda}{\lambda - \mu} \text{Ai}(\lambda + x)\text{Ai}(\mu + x) \\ &= -\text{Ai}(\lambda + x)\text{Ai}(\mu + x) = f_1(\lambda)h_2(\mu). \end{aligned}$$

Ainsi que l'équation suivante grâce à (3.27)

$$\begin{aligned}
 (3.69) \quad \frac{d}{dx} \log(\det(1 - K_x)) &= -\text{Tr}(1 - K_x)^{-1} \frac{d}{dx} K_x \\
 &= -\int_0^{+\infty} [(1 - K)^{-1} f_1](\lambda) h_2(\lambda) d\lambda \\
 &= -\int_0^{+\infty} F_1(\lambda) h_2(\lambda) d\lambda.
 \end{aligned}$$

Dès lors, grâce au comportement asymptotique de la solution  $Y(\lambda)$  et à (3.66), nous avons

$$(3.70) \quad m_1 = \int_0^{+\infty} F(\lambda) h^T(\lambda) d\lambda.$$

En associant ce résultat à (3.69), nous obtenons

$$(3.71) \quad \frac{d}{dx} \log(\det(1 - K_x)) = -m_{112}.$$

Avant de conclure cette démonstration, nous devons montrer que la fonction  $w(x)$  a bien le comportement asymptotique demandé dans l'énoncé du théorème. Pour cela, remarquons que le noyau  $K_x(\lambda, \mu)$  décroît exponentiellement comme la fonction d'Airy et que

$$(3.72) \quad w(x) = F_1(0) \sim f_1(0) = \text{Ai}(x).$$

Nous pouvons maintenant conclure par deux séries de calcul.

Premièrement,

$$\begin{aligned}
 (3.73) \quad \int_x^{+\infty} (y-x)w^2(y)dy &= \int_x^{+\infty} (y-x)u_y(y)dy \\
 &= \int_x^{+\infty} (yu_y(y) - u(y) - xu_y(y))dy \\
 &= -\int_x^{+\infty} u(y)dy + [yu(y) - xy(y)]_x^{+\infty} = -\int_x^{+\infty} u(y)dy.
 \end{aligned}$$

La dernière égalité est donnée par le comportement asymptotique de  $w$ .

Deuxièmement, par l'équation (3.71), nous avons

$$\begin{aligned}
 (3.74) \quad \det(1 - K_x) &= \exp \left\{ -\int_x^{+\infty} m_{112} dy \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\int_x^{+\infty} u(y) dy \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\int_x^{+\infty} (y-x)w^2(y) dy \right\}.
 \end{aligned}$$

□



## Construction informatique des polynômes de Yablonsky-Vorob'ev

Dans cet appendice, nous proposons le code MATLAB mentionné dans le chapitre 2. Celui-ci nous permet de construire les dix premiers polynômes YV ainsi que les solutions de  $P_{II}$  associées. Il construit aussi les graphes des polynômes et des solutions.

```

syms x f(x) h(x)
n=10;
P=sym(zeros(1,n));
w=sym(zeros(1,n));
P(1)=1;
P(2)=x;
for i=3:n
f(x)=P(i-2);
h(x)=P(i-1);
h_1(x)=diff(h,x);
h_2(x)=diff(h,x,2);
P(i)=(x*h(x)^2-4*h(x)*h_2(x)+4*h_1(x)^2)/f(x);
end
P=simplify(P);
P(n)
fplot(P(n));
for i=2:n
w(i)=diff(log(P(i-1)/P(i)),x);
end
w=simplify(w);
w(n);
fplot(w(n));

```



## Conclusion

La construction et l'étude de solutions pour la seconde équation de Painlevé était l'ambition de ce mémoire. Ce sujet assez limité au départ nous a cependant permis d'établir plusieurs liens entre divers champs d'étude mathématique. Cela nous permet d'envisager un questionnement assez large. En effet, afin de construire ces solutions, nous avons exploré deux méthodes. La première, utilisant les outils de l'analyse complexe, nous a menés à établir deux grands résultats : l'un montrant le lien entre une solution de  $P_{II}$  dans le cas où  $\alpha = 0$  et la solution d'un problème de Riemann-Hilbert, l'autre établissant le comportement asymptotique de cette solution. Au vu des détails de la méthode développée dans ce mémoire, mais aussi au vu de récents résultats de recherche (Amir-Corwin-Quastel), il paraît raisonnable d'ouvrir la question d'une généralisation vers une classe d'équations intégral-différentielles en lien avec  $P_{II}$ . Une autre ouverture, déjà mentionnée au tout début de l'introduction, vient du fait que  $P_{II}$  est loin d'être la seule équation différentielle. La généralisation de cette méthode à d'autres équations différentielles est donc légitime. La deuxième méthode établit un lien entre l'équation de Painlevé II, l'algèbre et la formulation physique du problème. Venait aussi s'ajouter la construction d'une hiérarchie des solutions. Il est déjà connu que ce dernier concept peut s'étendre à d'autres classes d'équations différentielles comme celle de l'équation de Kortweg-de Vries. Il paraît alors envisageable d'à nouveau ouvrir la question d'une généralisation ou d'une adaptation de processus décrits dans le chapitre deux.

Toutes ces questions qui découlent des principaux résultats exposés dans ce mémoire peuvent être envisagées.



## Bibliographie

- [1] G. Akemann and J. Baik and P. Di Francesco, *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2011. †3, 4, 6, 33
- [2] A. Bolibruch and A. Its and A. Kapaev, *Algebra and Analysis* **16** (2004), 121. †8
- [3] T. Claeys, *LMAT2420-Complex analysis II*, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Septembre 2017. †14, 30
- [4] ———, *LMAT2260-Topics in complex analysis and geometry*, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Septembre 2018. †5
- [5] P.A. Clarkson, *Painlevé equations-non linear special functions*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **153** (2003), 127–140. †24, 29, 32
- [6] P. Deift and X. Zhou, *A Steepest Descent Method for Oscillatory Riemann–Hilbert Problems. Asymptotics for the MKdV Equation*, *Annals of Mathematics* **137** (1993), 295–368. †15
- [7] H. Flaschka and A. Newell, *Monodromy-and Spectrum-Preserving Deformations I*, *Comm. Math. Phys.* **76** (1980), 65-116. †3
- [8] A. Fokas and A. Its and A. Kapaev and V. Novokshenov, *Painlevé Transcendents : The Riemann-Hilbert Approach*, Vol. 128, AMS Mathematical Surveys and Monographs, 2006. †3
- [9] B. Gambier, *Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est a points critiques fixes*, *Acta Math.* **33** (1910), 1-55. †2
- [10] K. Kajiwara and Y. Ohta, *Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation*, *Journal of Mathematical Physics* **37** (1996), 4693–4704. †3, 24
- [11] P. Painlevé, *Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme*, *Bull. Soc. Math. Fr.* **28** (1900), 201-261. †2
- [12] ———, *Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme*, *Acta Math.* **25** (1902), 1-85. †2
- [13] Makoto Taneda, *Remarks on the Yablonskii-Vorob'ev polynomials*, *Nagoya Math. J.* **159** (2000), 87–111. †3, 18, 20, 25

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | [www.uclouvain.be/sc](http://www.uclouvain.be/sc)